

# Un petit exercice

Xavier Caruso

1<sup>er</sup> avril 2002

## Énoncé :

Au début, l'urne contient 200 boules blanches et 100 boules noires et c'est Pierre qui a toutes les allumettes, et il en a vraiment beaucoup, à volonté quoi. Pierre en mise un certain nombre et Nicolas retire une boule de l'urne. Si elle est blanche, il récupère les allumettes que Pierre a mises. Si elle est noire, Pierre récupère sa mise et prend à Nicolas le même nombre qu'il avait mis. Si Nicolas n'a pas assez d'allumettes pour le satisfaire, Pierre est déclaré vainqueur. Sinon, on continue... Si Nicolas arrive à retirer ainsi toutes les boules de l'urne, il gagne. Montrer que Pierre a une stratégie pour gagner la partie. Montrer que ce n'est plus le cas si Pierre est tenu de miser moins de 1500 allumettes par coup.

## Démonstration :

Si le nombre d'allumettes n'est pas limité, Pierre peut par exemple jouer à chaque tour une allumette de plus que n'en a Nicolas à ce tour. Ainsi, dès que la première boule noire va sortir, Nicolas ne pourra pas répondre.

Supposons maintenant que le nombre d'allumettes soit limité. Commençons par faire quelques modifications dans le jeu. Autorisons les nombres fractionnaires et disons que Pierre peut faire crédit de certaines allumettes à Nicolas de sorte que le jeu puisse continuer jusqu'à épuisement de l'urne. Autrement dit, on admet que Nicolas puisse à un certain moment posséder un nombre d'allumettes négatif. À ce moment, Pierre est déclaré vainqueur si à la fin du jeu, Nicolas possède au plus  $(-1)$  allumette. Il est facile de se convaincre que si Pierre possède une stratégie gagnante pour le jeu de départ, il en possède une également pour ce nouveau jeu. Autrement dit, si l'on montre que ce nouveau jeu n'admet pas de stratégie gagnante, il en sera de même pour celui de l'énoncé.

Examinons donc ce nouveau jeu. Notons  $M$  la mise maximale autorisée. Supposons en outre que l'urne au départ contient  $n$  boules noires et  $m$  boules blanches. Une stratégie donnée peut aboutir à divers résultats, selon l'ordre dans lequel les boules sont tirées. Parmi tous ces résultats, il y en a un qui est tel que l'opposé du nombre d'allumettes avec lequel se retrouve Nicolas à la fin de la partie est maximal. Ce nombre est ce que l'on va appeler le gain de la stratégie en question. Notons  $f(n, m)$  le plus grand gain que l'on peut obtenir lorsque l'on fait varier les diverses stratégies. Il s'agit donc de montrer que  $f(100, 200) \leq 1$ .

On voit facilement que  $f(0, m) = 0$  et  $f(n, 0) = nM$ .

D'autre part, supposons que l'on dispose d'une stratégie pour une urne avec  $n$  boules noires et  $m$  boules blanches. Notons  $a$  la mise que cette stratégie dit de jouer au premier coup. Si celui-ci est gagnant, notre stratégie va nous rapporter moins que  $a + f(n - 1, m)$  (car sinon on aurait une meilleure stratégie pour le cas  $(n - 1, m)$ ). De même si ce coup est perdant, notre stratégie nous rapportera moins que  $-a + f(n, m - 1)$ . Ainsi :

$$f(n, m) \leq \min \{a + f(n - 1, m), -a + f(n, m - 1)\}$$

On étudie la fonction en  $a$  qui apparaît, on voit qu'elle admet son maximum en  $a_0 = \frac{f(n,m-1)-f(n-1,m)}{2}$  et que celui-ci vaut  $\frac{f(n,m-1)+f(n-1,m)}{2}$ . On en déduit que :

$$f(n,m) \leq \frac{f(n,m-1) + f(n-1,m)}{2}$$

Il ne reste plus qu'à montrer que cela implique que  $f(100,200) \leq 1$  si  $M = 1500$ , ce qui se fait en calculant.