Courbe du chien

Xavier Caruso

Supposons qu'un promeneur se balade le long de la plage déserte à vitesse constante v. Son chien, qui avait pris un peu d'avance, scrute l'horizon face à la mer, un peu en retrait, disons à une distance d de la ligne que suit inlassablement le maître. Lorsque ce dernier passe devant le point que l'animal fixait au loin, celui-ci se décide à le rejoindre. Il court à une vitesse constante V en modifiant continuellement sa trajectoire pour toujours aller en direction de son maître qui avance toujours sur la même ligne imaginaire, toujours à la même vitesse, encore plus inlassablement que tout à l'heure. On imagine bien que si la vitesse du chien est strictement supérieure à celle de l'humain, celui-ci va finir par le rattraper. Mais ami lecteur, sauras-tu dire au bout de combien de temps ?

Choisissons l'origine des temps par exemple au moment où le chien aperçoit son maître et commence à courir vers lui et supposons par exemple qu'à ce moment le maître se trouve à l'origine O et se déplace sur l'axe des abscisses dans la direction des x positifs.

Il est alors facile de voir qu'à l'instant t la position du maître sera répérée par les coordonnées $(vt, 0)$. Notons $(x(t), y(t))$ la position du chien à l'instant t. On a par exemple les conditions initiales : $x(0) = d$ et $y(0) = 0$. La stratégie de poursuite du chien se traduit par les équations suivantes (écrites dans le langage des physiciens qui bien que peu rigoureux, il faut le reconnaître, est bien pratique pour ce genre de choses) :

$$\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = V.\mathrm{d}t \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x - vt} \tag{2}$$

L'équation 2 peut se réécrire de la façon suivante :

$$\frac{y}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = x - vt$$

ce qui donne en différentiant :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}}_{\mathrm{d}x} - y\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = dx - vdt$$

et puis en utilisant l'équation 1, on obtient :

$$y\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \frac{v}{V}\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \frac{v}{V}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 1}\ \mathrm{d}x$$

et puis finalement :

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 1}} = \frac{v}{V}\frac{\mathrm{d}y}{y} = k\frac{\mathrm{d}y}{y} \tag{3}$$

On aimerait bien désormais intégrer cette dernière équation. Mais pour cela, il va être tout d'abord nécessaire d'intégrer la fonction $u \mapsto \frac{1}{u\sqrt{u^2+1}}$ définie pour $u < 0$ (car le bon sens même laisse entendre que le chien ne va pas se diriger tout à coup dans la direction opposée à la mer). Cela se résout sans trop de mal en faisant le changement de variable $w^2 = u^2 + 1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2+1}} &= \int \frac{\mathrm{d}w}{w^2-1} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{w-1} - \frac{1}{w+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{w-1}{w+1}\right) + \mathrm{cte} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{u^2+1}-1}{\sqrt{u^2+1}+1}\right) + \mathrm{cte}\end{aligned}$$

On est maintenant en mesure d'intégrer 3. Faisons-le entre 0 et t. Pour $t = 0$, on a vu que $y = d$ et l'équation 2 donne $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \infty$. On obtient :

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+1}-1}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+1}+1}\right) = k\ln\left(\frac{y}{d}\right)$$

ou encore :

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+1}-1}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+1}+1} = \left(\frac{y}{d}\right)^{2k}$$

Ceci se réécrit :

$$1 - \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+1}+1} = \left(\frac{y}{d}\right)^{2k}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+1}+1} = 1 - \left(\frac{y}{d}\right)^{2k}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+1}+1 = \frac{2}{1-\left(\frac{y}{d}\right)^{2k}}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \left(\frac{2}{1-\left(\frac{y}{d}\right)^{2k}} - 1\right)^2 - 1 = \frac{4\left(\frac{y}{d}\right)^{2k}}{\left(1-\left(\frac{y}{d}\right)^{2k}\right)^2}$$

et finalement, comme $0 \leqslant y \leqslant d$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \leqslant 0$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2\left(\frac{y}{d}\right)^k}{\left(\frac{y}{d}\right)^{2k} - 1}$$

soit :

$$\left(\left(\frac{y}{d}\right)^k - \left(\frac{y}{d}\right)^{-k}\right)\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x \tag{4}$$

Intégrons maintenant l'équation 4 entre 0 et t. Il vient :

$$\frac{\left(\frac{y}{d}\right)^{k+1} - 1}{k+1} - \frac{\left(\frac{y}{d}\right)^{-k+1} - 1}{-k+1} = 2\frac{x}{d} \tag{5}$$

ce qui est précisément une équation de la trajectoire suivie par le chien.

Pour calculer le temps nécessaire au chien pour rattraper son maître, on commence par déterminer le point de rencontre. Pour cela, il suffit de faire $y = 0$ dans l'équation 5. On trouve alors :

$$x_R = \frac{d}{2}\left(\frac{-1}{k+1} - \frac{-1}{-k+1}\right) = \frac{kd}{1-k^2} = d.\frac{Vv}{V^2-v^2}$$

Comme le point de recontre est aussi atteint par le maître, il n'est pas dur de déterminer la date de rencontre :

$$t_R = \frac{x_R}{v} = d.\frac{V}{V^2-v^2}$$