Formule de Frobenius

Xavier Caruso

Novembre 1999

Table des matières

Première partie
Énoncé de la formule de Frobenius

1 La formule de Frobenius

1.1 Rappels et notations

Définition 1.1 *On dit que* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ *est une partition de l'entier* d *si* $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k$ *et* $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = d$.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ une partition de d.
On lui associe un *diagramme d'Young* que l'on numérote comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.1 $d = 12$ *et* $\lambda = (5, 3, 2, 1, 1)$.

1	2	3	4	5
6	7	8		
9	10			
11				
12				

Notation 1.1 *On introduit ensuite les ensembles :*
- $P_\lambda = \{g \in S_d \mid g\, stabilise\, chaque\, ligne\}$
- $Q_\lambda = \{g \in S_d \mid g\, stabilise\, chaque\, colonne\}$
- *L'algèbre* $A = \bigoplus_{\sigma \in S_d} \mathbb{C} e_\sigma$ *où la multiplication est définie par la distributivité et par la relation* $e_\sigma e_{\sigma'} = e_{\sigma \circ \sigma'}$

On définit ensuite $a_\lambda = \sum_{\sigma \in P_\lambda} e_\sigma$ *et* $b_\lambda = \sum_{\sigma \in Q_\lambda} \epsilon(\sigma) e_\sigma$ *où* ϵ *est la signature. Et on pose* $V_\lambda = \{x a_\lambda b_\lambda \mid x \in A\}$.

Théorème 1.1 *L'application* $\rho_\lambda : \begin{pmatrix} S_d & \to & GL(V_\lambda) \\ \sigma & \longmapsto & (x \longmapsto e_\sigma x) \end{pmatrix}$ *est une représentation irréductible de* S_d *et ce sont les seules à isomorphisme près.*

Exemple 1.2 *Prenons* $\lambda = (d)$. *On a alors immédiatement* $P_\lambda = S_d$ *et* $Q_\lambda = \{id\}$. *Ainsi* $a_\lambda = \sum_{\sigma \in S_d} e_\sigma$ *et* $b_\lambda = e_{id}$. *On a alors :*

$$\forall \tau \in S_d \qquad e_\tau a_\lambda = \sum_{\sigma \in S_d} e_{\tau \circ \sigma} = \sum_{\sigma \in S_d} e_\sigma = a_\lambda$$

On en déduit alors que $V_\lambda = \mathbb{C} a_\lambda$ *et que l'on a trouvé la représentation triviale.*

1.2 La formule de Frobenius

On fixe ici λ une partition de d. Soit $x_1, \ldots, x_k$ k variables indépendantes qui commutent (où k a été défini précédemment)

Notation 1.2 *Si* $F = F(x_1, \ldots, x_k)$ *est une série formelle en les variables* $x_1, \ldots, x_k$, *on notera* $[F]_{l_1, \ldots, l_k}$ *le coefficient en* $x_1^{l_1} \ldots x_k^{l_k}$ *dans* F.

Notation 1.3 *Si* $i = (i_1, \ldots, i_d)$, *on pose*

$$P^{(i)} = \prod_{\alpha=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{k} x_j^\alpha \right)^{i_\alpha} = (x_1 + \ldots + x_k)^{i_1} \ldots \left(x_1^d + \ldots + x_k^d\right)^{i_d}$$

Notation 1.4 *On pose* $\Delta = \prod_{1\leq i<j\leq k} (x_i - x_j)$

Notation 1.5 *Si* $i = (i_1, \ldots, i_d)$*, on définit* C_i *comme l'ensemble des permutations qui comptent* i_1 *orbites de cardinal* 1*, ...,* i_k *orbites de cardianl* k*.* C_i *forme alors une classe de conjugaison.*

Notation 1.6 *On pose* $l_i = \lambda_i + k - i$ *et* $l = (l_1, \ldots, l_k)$

Théorème 1.2 *Formule de Frobenius. Si* $i = (i_1, \ldots, i_d)$*, on a*

$$\forall \sigma \in C_i \qquad \chi_\lambda(\sigma) = \left[\Delta P^{(i)}\right]_l$$

Exemple 1.3 *Vérifions la formule de Frobenius pour la représentation triviale. On a vu précédemment qu'elle correspondait à* $\lambda = (d)$*. On alors alors* $k = 1$*,* $l = (d)$ *et* $\Delta = 1$ *On calcule*

$$P_{(i)} = \prod_{\alpha=1}^{d} x_1^{\alpha i_\alpha} = x_1^{\left(\sum_{\alpha=1}^{d} \alpha i_\alpha\right)}$$

Soit $\sigma \in S_d$*, on a alors* $\sigma \in C_i$ *avec* $\sum_{\alpha=1}^{d} \alpha i_\alpha = d$ *et donc* $\Delta P^{(i)} = x_1^d$ *et* $\chi_\lambda(\sigma) = 1$*, ce qui est rassurant.*

2 Application - Formule des crochets

2.1 La dimension des réprésentation irréductibles

Théorème 2.1 *La dimension des espaces irréductibles est donnée par :*

$$dim\, V_\lambda = \frac{d!}{l_1! \ldots l_k!} \prod_{1\leq i<j\leq k} (l_i - l_j)$$

Démonstration. On sait que $dim\, V_\lambda = \chi_\lambda(e) = \left[\Delta P^{(d)}\right]_l$. Or

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_k & \ldots & x_k^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^{k-1} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_k} \epsilon(\sigma)\, x_k^{\sigma(1)-1} \ldots x_1^{\sigma(k)-1}$$

$$P_{(d)} = (x_1 + \ldots + x_k)^d = \sum_{r_1+\ldots+r_k=d} \frac{d!}{r_1! \ldots r_k!} x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k}$$

On en déduit que le coefficient recherché vaut :

$$\sum_{\sigma\in S_k} \epsilon(\sigma) \frac{d!}{(l_1 - \sigma(k) + 1)! \ldots (l_k - \sigma(1) + 1)!} =$$

$$\frac{d!}{l_1! \ldots l_k!} \sum_{\sigma\in S_k} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{k} l_i\,(l_i - 1) \ldots (l_i - \sigma(k - i + 1) + 2)$$

Posons $m_{i,j} = l_j\,(l_j - 1) \ldots (l_j - i + 2)$ et $\tau(i) = k + 1 - i$. On a alors $\tau \in S_k$ et

$$dim\, V_\lambda = \frac{d!}{l_1! \ldots l_k!} \sum_{\sigma\in S_k} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{k} m_{i,\sigma\circ\tau(i)} = \frac{d!}{l_1! \ldots l_k!} \sum_{\sigma\in S_k} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{k} m_{\tau(i),\sigma(i)}$$

$$dim\, V_\lambda = \frac{d!}{l_1! \ldots l_k!} \left|(m_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}\right| = \frac{d!}{l_1! \ldots l_k!} \begin{vmatrix} 1 & l_k & \ldots & l_k^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & l_1 & \ldots & l_1^{k-1} \end{vmatrix}$$

On utilise à nouveau l'expression du déterminant de Vandermonde :

$$dim\, V_\lambda = \frac{d!}{l_1! \ldots l_k!} \prod_{1\leq i<j\leq k} (l_i - l_j)$$

□

2.2 Une autre formulation

Définition 2.1 *Soit une case dans le diagramme de Young (que l'on repèrera par la suite par le numéro de sa ligne et sa position sur cette ligne). On appelle crochet de cette case l'ensemble des cases situées sur la même ligne et à droite (au sens large) ou sur la même colonne et en dessous. On appelle longueur du crochet le cardinal de cet ensemble.*

On notera $L_{(\lambda)(k,l)}$ la longueur de crochet correspondant à la case (k,l) et $L_{(\lambda)}$ le produit de toutes ces longueurs.

Exemple 2.1 *Reprenons le premier exemple, qui donne le tableau suivant :*

9	6	4	2	1
6	3	1		
4	1			
2				
1				

On a ici $L_{(\lambda)(2,2)} = 3$ *et* $L_{(\lambda)} = 62\,208$

Remarque 2.1 *On a immédiatement* $L_{(\lambda)(i,1)} = l_i$

Théorème 2.2 *La dimension des espaces irréductibles est donnée par :*

$$dim\, V_\lambda = \frac{d!}{L_{(\lambda)}}$$

Démonstration. Etant donné le précédent théorème, il suffit de montrer que :

$$L_{(\lambda)} = \frac{l_1! \dots l_k!}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (l_i - l_j)}$$

Procédons par récurrence sur λ_1.
Si $\lambda_1 = 1$, alors on a $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$ et $l = (d, d-1, \dots, 1)$. Ainsi à i fixé, on peut écrire $\frac{l_i!}{\prod_{j>i} (l_i - l_j)} = \frac{(d-i+1)!}{(d-i)!} = d - i + 1$ et donc $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (l_i - l_j) = d! = L_{(\lambda)}$

Sinon, on a $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Notons alors p le plus grand entier tel que $\lambda_p \neq 1$ et considérons la partition $\lambda' = (\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_p - 1)$. On a le schéma suivant.

$$\lambda \sim \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline l_1 & L_{(\lambda)(1,2)} & \dots & L_{(\lambda)(1,\lambda_1)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline l_p & L_{(\lambda)(p,2)} & \dots & L_{(\lambda)(p,\lambda_p)} \\ \hline l_{p+1} = k - p & & & \\ \vdots & & & \\ l_k = 1 & & & \\ \hline \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \lambda' \sim \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline L_{(\lambda)(1,2)} & \dots & L_{(\lambda)(1,\lambda_1)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline L_{(\lambda)(p,2)} & \dots & L_{(\lambda)(p,\lambda_p)} \\ \hline \end{array}\right)$$

On a immédiatement l'égalité suivante :

$$L_{(\lambda)} = L_{(\lambda')} \prod_{i=1}^{k} l_i$$

Et on peut calculer $l'_i = \lambda_i + 1 + p - i = l_i - (k + 1 - p)$
Comme λ' relève de l'hypothèse de récurrence on obtient :

$$L_{(\lambda)} = \frac{\prod_{i=1}^{p} [l_i - (k+1-p)]!}{\prod_{1 \leq i < j \leq p} (l_i - l_j)} \prod_{i=1}^{k} l_i = \frac{\prod_{i=1}^{p} l_i \, [l_i - (k+1-p)]!}{\prod_{1 \leq i < j \leq p} (l_i - l_j)} \prod_{i=p+1}^{k} l_i$$

Fixons alors i entre 1 et p. On peut écrire :

$$l_i \, [l_i - (k+1-p)]! = \frac{l_i!}{(l_1 - 1) \dots (l_i - (k-p))} = \frac{l_i!}{\prod_{j=p+1}^{k} (l_i - l_j)}$$

Ce qui donne en réinjectant le résultat voulu. $\square$

Deuxième partie

Polynômes symétriques et antisymétriques

Dans tout ce qui suit, polynôme signifiera polynôme homogène en les variables $x_1, \ldots, x_k$

1 Préliminaires

1.1 Définitions

Définition 1.1 *P est un polynôme symétrique si :*

$$\forall \sigma \in S_k, \qquad P\left(x_1, \ldots, x_k\right) = P \;\; x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}$$

On notera Sym_d l'espace vectoriel des polynômes symétriques de degré d.

Définition 1.2 *P est un polynôme antisymétrique si :*

$$\forall \sigma \in S_k, \qquad P\left(x_1, \ldots, x_k\right) = \epsilon(\sigma) P \;\; x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}$$

On notera Ans_d l'espace vectoriel des polynômes antisymétriques de degré d.

Notation 1.1 *On pose* $\Delta = \prod\limits_{1 \leq i < j \leq k} (x_i - x_j)$

Remarque 1.1 *Δ est un polynôme de degré $\frac{k(k-1)}{2}$.*

1.2 Premières propriétés

Lemme 1.1 *Soit P un polynôme antisymétrique, alors P est un multiple de Δ.*

Démonstration. Il suffit de prouver, par exemple, que $(x_1 - x_2)$ divise P.

Définissons alors $p_{x_2, \ldots, x_k}(x_1) = P(x_1, \ldots, x_k)$ qui est un polynôme à une seule variable et effectuons la division euclidienne de p par $(x_1 - x_2)$.

$$P\left(x_1, \ldots, x_k\right) = \left(x_1 - x_2\right) q_{x_2, \ldots, x_k}\left(x_1\right) + r_{x_2, \ldots, x_k}\left(x_1\right)$$

Le fait que le coefficient en x_1 dans le diviseur est 1 prouve, en examinant l'algorithme de division euclidienne, que le dépendance de q et de r vis-à-vis des variables $x_2, \ldots, x_k$ est polynômiale.

D'autre part, le dégré de r est strictement inférieur à 1, donc on peut écrire l'égalité suivante :

$$P\left(x_1, \ldots, x_k\right) = \left(x_1 - x_2\right) Q\left(x_1, \ldots, x_k\right) + R\left(x_2, \ldots, x_k\right)$$

En faisant désormais ń $x_1 = x_2$ ż, on obtient le résultat recherché. $\square$

Lemme 1.2 *Le produit de deux polynômes symétriques est un polynôme symétrique. Le produit de deux polynômes antisymétriques est un polynôme symétrique. Le produit d'un polynôme symétrique et d'un polynôme antisymétrique est un polynôme antisymétrique.*

On en déduit que $\phi : \left. \begin{array}{ccc} Sym_d & \rightarrow & Ans_{d+\frac{k(k-1)}{2}} \\ P & \mapsto & \Delta P \end{array} \right)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2 Bases de Sym_d et de $Ans_{d+\frac{k(k-1)}{2}}$

2.1 Définitions

Ω désigne l'ensemble des partitions de l'entier d en longueur k que l'on ordonne par l'ordre lexicographique.

Soit $\lambda \in \Omega$. On définit tout d'abord la relation d'équivalence suivante sur S_k :

$$\sigma \equiv \sigma' \;\; (mod\ \lambda) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall i \in [\![1, k]\!], \;\; \lambda_{\sigma(i)} = \lambda_{\sigma'(i)}$$

On peut alors poser :

$$M_\lambda = \sum_{\sigma \in S_k / \lambda} x_1^{\lambda_{\sigma(1)}} \ldots x_k^{\lambda_{\sigma(k)}}$$

(Intuitivement, si plusieurs termes identiques apparaissaient dans cette somme, on n'en a gardé qu'un seul).

On vérifie alors facilement que $M_\lambda \in Sym_d$ et que la famille $(M_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ forme une base de Sym_d.

Si $\lambda \in \Omega$, on définit λ' par $\lambda'_i = \lambda_i + k - i$. Ceci permet intuitivement de transformer une suite décroissante en une suite strictement décroissante gardant des propriétés analogues. Pour $\lambda \in \Omega$, on définit alors :

$$N_\lambda = \sum_{\sigma\in S_k} \epsilon(\sigma) x_1^{\lambda'_{\sigma(1)}} \dots x_k^{\lambda'_{\sigma(k)}}$$

On vérifie alors facilement que $N_\lambda \in Ans_{d+\frac{k(k-1)}{2}}$ et que la famille $(N_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ forme une base de $Ans_{d+\frac{k(k-1)}{2}}$.

On définit finalement S_λ comme étant l'image réciproque par ϕ de N_λ. La famille $(S_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ forme alors une base de Sym_d appelée *base de Schur*.

2.2 Matrice de passage de M_λ à S_λ

Définissons tout d'abord la permutation $s \in S_k$ par $s(i) = k + 1 - i$.

Soit $\lambda \in \Omega$. Calculons :

$$\begin{aligned}\phi(M_\lambda) &= \sum_{\tau\in S_k} \sum_{\sigma\in S_k/\lambda} \epsilon(\tau) x_1^{\lambda_{\sigma(1)}+\tau(k)-1} \dots x_k^{\lambda_{\sigma(k)}+\tau(1)-1} \\ &= \sum_{\tau\in S_k} \sum_{\sigma\in S_k/\lambda} \epsilon(\tau) x_1^{\lambda_{\sigma\tau s(1)}+\tau s(1)-1} \dots x_k^{\lambda_{\sigma\tau s(k)}+\tau s(k)-1}\end{aligned}$$

car si $\sigma \equiv \sigma' \pmod{\lambda}$, alors $\sigma\tau s \equiv \sigma'\tau s \pmod{\lambda}$

$$\phi(M_\lambda) = \epsilon(s) \sum_{\sigma\in S_k/\lambda} \underbrace{\left(\sum_{\tau\in S_k} \epsilon(\tau) x_1^{\lambda_{\sigma\tau(1)}+\tau(1)-1} \dots x_k^{\lambda_{\sigma\tau(k)}+\tau(k)-1} \right)}_{P_\sigma}$$

Trions alors les exposants, c'est-à-dire définissons σ' de telle sorte que

$$\lambda_{\sigma\sigma'(1)} + \sigma'(1) - 1 \geq \dots \geq \lambda_{\sigma\sigma'(k)} + \sigma'(k) - 1$$

S'il y a une égalité, alors il vient $P_\sigma = 0$.

Sinon, on pose $\mu_i = \lambda_{\sigma\sigma'(i)} + \sigma'(i) - 1 + i - k$. On a alors $\mu \in \Omega$ et $P_\sigma = \epsilon(\sigma')N_\mu$.

Montrons alors que $\mu \leq \lambda$. On a $\mu_1 = \underbrace{\lambda_{\sigma\sigma'(1)}}_{\leq\lambda_1} + \underbrace{\sigma'(1) - k}_{\leq 0} \leq \lambda_1$

Si on a l'égalité, on en déduit que $\begin{array}{l}\lambda_{\sigma\sigma'(1)} = \lambda_1 \\ \sigma'(1) = k\end{array}$

Et donc $\mu_2 = \underbrace{\lambda_{\sigma\sigma'(2)}}_{\leq\lambda_2} + \underbrace{\sigma'(2) - (k-1)}_{\leq 0} \leq \lambda_2$

Ainsi de suite, on prouve que $\mu \leq \lambda$

D'autre part, montrons que N_λ apparaît une seule fois.

En effet, si $P_\sigma = \pm N_\mu$, d'après l'étude précédente et en reprenant les notations précédentes , il vient :

$$\forall i \in [\![1, k]\!] \qquad \begin{array}{l}\lambda_{\sigma\sigma'(i)} = \lambda_i \\ \sigma'(i) = k + 1 - i\end{array}$$

Autrement dit $\sigma' = s$ et $\sigma\sigma' \equiv id \pmod{\lambda}$, ce qui donne $\sigma \equiv s \pmod{\lambda}$ et prouve l'unicité.

Réciproquement si on premd $\sigma = s$, on peut alors choisir $\sigma' = s$ et puis $\mu = \lambda$.

De plus, le coefficient qui apparaît est alors donné par $\epsilon(s)\epsilon(\sigma') = 1$.

Ainsi la matrice de passage de (S_λ) à (M_λ) a la forme suivante : $\begin{pmatrix} 1 & & \in \mathbb{Z} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

(on a ordonné les bases par l'ordre induit par les partitions de Ω)

En inversant cette matrice, on trouve la matrice de Kostka, matrice de passage de $(M_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ à $(S_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & & \in \mathbb{Z} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui s'écrit également $S_\mu = \sum_{\lambda\in\Omega} K_{\mu\lambda} M_\lambda$.

Théorème 2.1 *Soit $P \in Sym_d$, alors* $[P]_\lambda = \sum_{\mu\in\Omega} K_{\mu\lambda} [\Delta P]_{\mu'}$

Démonstration. On a $\Delta P = \sum_{\mu\in\Omega} [\Delta P]_{\mu'} N_\mu$ et donc en prenant l'image réciproque par ϕ, il vient :

$$P = \sum_{\mu\in\Omega} [\Delta P]_{\mu'} S_\mu = \sum_{\lambda\in\Omega} \left(\sum_{\mu\in\Omega} K_{\mu\lambda} [\Delta P]_{\mu'} \right) M_\lambda$$

D'autre part, on a $P = \sum_{\lambda\in\Omega} [P]_\lambda M_\lambda$, ce qui fournit le résultat en identifiant les coordonnées. □

3 Une formule d'orthogonalité

3.1 Séries formelles

Définition 3.1 *Une série formelle en les variables $x_1, \ldots, x_k$ est la donnée d'une application f de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{C}$. On la notera :*

$$F = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in\mathbb{N}^k} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\, x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}$$

On notera $[F]_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *et* $[F]_d = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_k=d} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\, x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}$

Définition 3.2 *Soit F une série formelle en les variables $x_1, \ldots, x_k$ telle que $[F]_{(0,\ldots,0)} = 0$. On définit alors :*

1. $\frac{1}{1-F} = 1 + F + F^2 + \ldots + F^n + \ldots$
2. $log\,(1-F) = F + \frac{F^2}{2} + \ldots + \frac{F^n}{n} + \ldots$
3. $exp\,(F) = 1 + F + \frac{F^2}{2} + \ldots + \frac{F^n}{n!} + \ldots$

Remarque 3.1 *Le fait que F ne possède pas de terme constant prouve que la ń valuation ż de F^k tend vers l'infini lorsque k tend vers l'infini et donc les sommes précédentes sont bien définies.*

Proposition 3.1 *On a les relations suivantes :*

1. $\frac{1}{1-F}\;(1-F) = 1$
2. $exp\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \prod_{n\in\mathbb{N}} exp\,(F_n)$ *si $val\,(F_n)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.*
3. $log\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} (1+F_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} log\,(1+F_n)$ *si $val\,(F_n)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.*
4. $exp\,(log\,(1-F)) = 1-F$

Remarque 3.2 *Une série formelle en les variables $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ peut être toujours considérée comme une série formelle en les variables $x_1, \ldots, x_k$ et à coefficients dans l'ensemble des séries formelles en les variables $y_1, \ldots, y_k$ (ou le contraire).*

3.2 Une formule d'orthogonalité

Lemme 3.1 *On a l'identité suivante :*

$$\left[\prod_{i,j} \frac{1}{1-x_iy_j}\right]_{d,d} = \sum_{\lambda\in\Omega} S_\lambda(x)S_\lambda(y)$$

Démonstration. Notons M la matrice suivante : $\left. \frac{1}{1-x_iy_j} \right._{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq k}}$.

Montrons tout d'abord que $det\, M = \frac{\Delta(x)\Delta(y)}{\prod_{i,j}(1-x_iy_j)}$. Pour cela on procède par récurrence sur k.

Pour $k=1$, le résultat est immédiat.

Sinon, en soustrayant la première ligne à chacune des autres, on obtient,

$$det\, M = \begin{matrix} \frac{1}{1-x_1y_1} & \dots & \frac{1}{1-x_1y_k} \\ \frac{x_2-x_1}{1-x_1y_1}\frac{y_1}{1-x_2y_1} & \dots & \frac{x_2-x_1}{1-x_1y_k}\frac{y_k}{1-x_2y_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{x_k-x_1}{1-x_1y_1}\frac{y_1}{1-x_ky_1} & \dots & \frac{x_k-x_1}{1-x_1y_k}\frac{y_k}{1-x_ky_k} \end{matrix}$$

(car $\frac{1}{1-x_iy_j} - \frac{1}{1-x_1y_j} = \frac{x_i-x_1}{1-x_1y_j}\frac{y_j}{1-x_iy_j}$)

$$det\, M = \left.\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{1-x_1y_j}\right) \left.\prod_{i=2}^{k} x_i - x_1\right) \underbrace{\begin{matrix} 1 & \dots & 1 \\ \frac{y_1}{1-x_2y_1} & \dots & \frac{y_k}{1-x_2y_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{y_1}{1-x_ky_1} & \dots & \frac{y_k}{1-x_ky_k} \end{matrix}}_{\delta}$$

Pour calculer δ on soustrait la première colonne, on obtient alors :

$$\delta = \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{y_1}{1-x_2y_1} & \frac{y_2-y_1}{1-x_2y_1}\frac{1}{1-x_2y_2} & \dots & \frac{y_k-y_1}{1-x_2y_1}\frac{1}{1-x_2y_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{y_1}{1-x_ky_1} & \frac{y_2-y_1}{1-x_ky_1}\frac{1}{1-x_ky_2} & \dots & \frac{y_k-y_1}{1-x_ky_1}\frac{1}{1-x_ky_k} \end{matrix}$$

(car $\frac{y_j}{1-x_iy_j} - \frac{y_1}{1-x_iy_1} = \frac{y_j-y_1}{1-x_iy_1}\frac{1}{1-x_iy_j}$)

$$\delta = \left.\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-x_iy_1}\right) \left.\prod_{j=2}^{k} y_j - y_1\right) \begin{matrix} \frac{1}{1-x_2y_2} & \dots & \frac{1}{1-x_2y_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{1-x_ky_2} & \dots & \frac{1}{1-x_ky_k} \end{matrix}$$

d'où, en regroupant, l'hérédité de la récurrence.

Remarquons également que $det\, M$ est une série formelle en les variables $x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_k$. Soit $\lambda\in\Omega$. En développant le déterminant, on voit que si l'on considère $det\, M$ comme une série formelle en y seulement :

$$[det\, M]_{\lambda'} = \begin{matrix} x_1^{\lambda'_1} & \dots & x_1^{\lambda'_k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_k^{\lambda'_1} & \dots & x_k^{\lambda'_k} \end{matrix} = N_\lambda(x)$$

Or $[det\, M]_{d+\frac{k(k-1)}{2},d+\frac{k(k-1)}{2}}$ est un polynôme antisymétrique en y donc on a ainsi trouvé sa décomposition sur la base $(N_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ ce qui permet d'écrire :

$$[det\, M]_{d+\frac{k(k-1)}{2},d+\frac{k(k-1)}{2}} = \sum_{\lambda\in\Omega} N_\lambda(x)N_\lambda(y) = \Delta(x)\Delta(y)\sum_{\lambda\in\Omega} S_\lambda(x)S_\lambda(y)$$

Finalement, en comparant les deux expressions de $det\, M$, on obtient bien le résultat proposé. □

Notation 3.1 *Posons maintenant :*

- $P_l(x) = x_1^l + \ldots + x_k^l$
- $P^{(i)} = P_{i_1}\ldots P_{i_d}$ *avec* $i = (i_1,\dots,i_d)$
- $\omega_\lambda(i) = \left[\Delta P^{(i)}\right]_{\lambda'}$

Théorème 3.1 *On a la formule d'orthogonalité suivante :*

$$\forall \lambda, \mu \in \Omega \qquad \sum_i \frac{1}{1^{i_1} i_1! \dots d^{i_d} i_d!} \omega_\lambda(i) \omega_\mu(i) = \delta_{\lambda\mu}$$

(où δ est le symbole de Kronecker)

Remarque 3.3 *Si $i = (i_1, \dots, i_d)$ ne vérifie pas $\sum_{q=1}^{d} q i_q = d$, alors $\omega_\lambda(i) = 0$. Donc la somme écrite précédemment est en réalité finie.*

Démonstration. Calculons la quantité suivante :

$$log \left(\prod_{m,n} \frac{1}{1 - x_m y_n} \right) = \sum_{m,n} \left(\sum_{l \geq 1} \frac{1}{l} (x_m y_n)^l \right) = \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l} P_l(x) P_l(y)$$

Donc en pernant l'exponentielle de chaque côté, on trouve :

$$\prod_{m,n} \frac{1}{1 - x_m y_n} = \prod_{l \geq 1} exp \left(\frac{1}{l} P_l(x) P_l(y) \right) = \prod_{l \geq 1} \left(\sum_{s \geq 0} \frac{1}{l^s s!} (P_l(x))^s (P_l(y))^s \right)$$

(Ce produit existe bien car on vérifie que pour calculer un coefficient, il suffit de faire un nombre fini d'opérations).

En regardant maintenant les coefficients de degré d en x et en y, on trouve :

$$\left[\prod_{m,n} \frac{1}{1 - x_m y_n} \right]_{d,d} = \sum_i \frac{1}{1^{i_1} i_1! \dots d^{i_d} i_d!} P^{(i)}(x) P^{(i)}(y) = \sum_{\lambda \in \Omega} S_\lambda(x) S_\lambda(y)$$

Or on a $P^{(i)} = \sum_{\lambda \in \Omega} \omega_\lambda(i) S_\lambda$, d'où le résultat en identifiant les coefficients des deux membres de l'égalité précédente dans la base $(S_\lambda S_\mu)_{\lambda, \mu \in \Omega}$. $\square$

Troisième partie
Démonstration de la formule de Frobenius

1 Préliminaires

On pose $\omega_\lambda(i) = \left[\Delta P^{(i)}\right]_l$ où l est associé à λ par la relation $l_i = \lambda_i + k - i$.

On ordonne les partitions de d de longueur k par l'ordre lexicographique (qui est total). On notera Ω leur ensemble.

On admettra les deux résultats suivants :

Résultat 1.1 *Si P est un polynôme symétrique en les variables $x_1, \ldots, x_k$, alors*

$$[P]_\lambda = \sum_{\mu \in \Omega} K_{\mu\lambda} \, [\Delta P]_{(\mu_1+k-1,\ldots,\mu_k)}$$

où $K_{\mu\lambda} \in \mathbb{Z}$, $K_{\lambda\lambda} = 1$ et $(\mu < \lambda) \Rightarrow (K_{\mu\lambda} = 0)$

Résultat 1.2 *Si $\lambda, \mu \in \Omega$, alors*

$$\sum_{i=(i_1,\ldots,i_d)} \frac{1}{\prod_{q=1}^{d} q^{i_q} i_q!} \omega_\lambda(i)\omega_\mu(i) = \delta_{\lambda\mu}$$

où δ est le symbole de Kronecker.

Remarque 1.1 *On voit aisément que si $\sum_{q=1}^{d} q i_q \neq d$ alors $\omega_\lambda(i) = 0$, ainsi la somme précédente est en réalité finie.*

2 Preuve de la formule de Frobenius

Remarquons tout d'abord que P_λ est un sous-groupe de S_d. Ainsi on peut considérer $U_\lambda = \bigoplus_{\sigma \in S_d/P_\lambda} \mathbb{C}e_\sigma$

On peut alors définir la représentation suivante :

$$\forall h \in S_d \qquad h \bullet \left(\sum_{\sigma \in S_d/P_\lambda} c_\sigma e_\sigma \right) = \sum_{\sigma \in S_d/P_\lambda} c_\sigma e_{h\sigma}$$

On remarquera que le fait que $(\sigma = \sigma') \Rightarrow (h\sigma = h\sigma')$ prouve que la définition ci-dessus est correcte.
Notons ψ_λ le caractère de cette représentation.

Soit $h \in C_i$. On peut écrire $\sum_{q=1}^{d} q i_q = d$

Posons $c = \quad \sigma \in S_d | \sigma h \sigma^{-1} = h \quad = \prod_{q=1}^{d} q^{i_q} i_q!$

Lemme 2.1 *On a $\psi_\lambda(h) = \frac{c}{|P_\lambda|} |C_i \cap P_\lambda|$*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que :

$$\psi_\lambda(h) = |\{\sigma \in S_d \,/ P_\lambda \; | h\sigma = \sigma\}| = \frac{1}{|P_\lambda|} \quad \sigma \in S_d | \sigma h \sigma^{-1} \in P_\lambda$$

Soit $h' \in S_d$.
Si $h' \in C_i$, alors il existe $\tau \in S_d$ tel que $h' = \tau^{-1} h \tau$ et donc on a l'équivalence suivante :

$$\sigma h \sigma^{-1} = h' \qquad \Leftrightarrow \qquad (\sigma\tau)\, h \,(\sigma\tau)^{-1} = h$$

Ainsi il vient $\quad \sigma \in S_d | \sigma h \sigma^{-1} = h' \quad = \quad \sigma \in S_d | \sigma h \sigma^{-1} = h \quad = c$

Sinon on a directement $\quad \sigma \in S_d | \sigma h \sigma^{-1} = h' \quad = 0$

On en déduit directement la formule voulue. $\square$

Remarque 2.1 *Cette méthode prouve également que* $|C_i| = \frac{|S_d|}{c} = \dfrac{d!}{\prod_{q=1}^{d} q^{i_q} i_q!}$

Lemme 2.2 *On a* $|C_i \cap P_\lambda| = \sum \prod_{p=1}^{k} \dfrac{\lambda_p!}{\prod_{q=1}^{d} q^{r_{pq}} r_{pq}!}$

où la somme est étendue aux r_{pq} *vérifiant* $\begin{cases} i_q = \sum_{p=1}^{k} r_{pq} \\ \lambda_p = \sum_{q=1}^{d} q r_{pq} \end{cases}$

Remarque 2.2 r_{pq} *représente intuitivement le nombre de cycles de longueur* q *pris dans* S_{λ_p}

Lemme 2.3 *On a* $\psi_\lambda(h) = \left[P^{(i)}\right]_\lambda$

Démonstration. On fait d'abord les simplifications suivantes :

$$\psi_\lambda(h) = \sum \frac{\prod_{q=1}^{d} q^{i_q} i_q!}{\prod_{p=1}^{k}\prod_{q=1}^{d} q^{r_{pq}} r_{pq}!} = \sum \prod_{q=1}^{d} \frac{q^{i_q} i_q!}{\prod_{p=1}^{k} q^{r_{pq}} r_{pq}!} = \sum \prod_{q=1}^{d} \frac{i_q!}{\prod_{p=1}^{k} r_{pq}!}$$

D'autre part la formule du multinôme donne :

$$\left[\left(\sum_{p=1}^{k} x_p^q\right)^{i_q}\right]_{qr_{1q},\ldots,qr_{kq}} = \frac{i_q!}{\prod_{p=1}^{k} r_{pq}!}$$

si on impose $\sum_{p=1}^{k} r_{pq} = i_q$ (les autres coefficients étant nuls).

La défintion de $\left[P^{(i)}\right]$ donne d'autre part :

$$\left[P^{(i)}\right]_\lambda = \sum \prod_{q=1}^{d} \left[\left(\sum_{p=1}^{k} x_p^q\right)^{i_q}\right]_{qr_{1q},\ldots,qr_{kq}}$$

(où la somme est encore étendue sur le même ensemble que précédemment).

On obtient ensuite par identification la formule désirée. □

Le premier résultat admis permet alors d'écrire :

$$\psi_\lambda(h) = \sum_{\mu \in \Omega} K_{\mu\lambda} \omega_\mu(i) = \omega_\lambda(i) + \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} \omega_\mu(i)$$

Décomposons alors U_λ en représentations irréductibles. On obtient ainsi la formule suivante : $\psi_\lambda(h) = \sum_{\mu \in \Omega} n_{\mu\lambda} \chi_\mu(h)$ où $n_{\mu\lambda} \in \mathbb{N}$.

Ainsi on obtient $\omega_\lambda(i) = \sum_{\mu \in \Omega} n_{\mu\lambda} \chi_\mu(h) - \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} \omega_\mu(i)$.

On montre alors facilement par une récurrence descendante que :

$$\omega_\lambda(i) = \sum_{\mu \in \Omega} m_{\mu\lambda} \chi_\mu(h), \qquad m_{\mu\lambda} \in \mathbb{Z}$$

La relation d'orthogonalité des caractères fournit $(\widetilde{\omega_\lambda}, \widetilde{\omega_\lambda}) = \sum_{\mu \in \Omega} m_{\mu\lambda}^2$.

D'autre part, on a par le deuxième résultat :

$$(\widetilde{\omega_\lambda}, \widetilde{\omega_\lambda}) = \frac{1}{d!} \sum_{i=(i_1,\ldots,i_d)} |C_i|\, \omega_\lambda(i) \omega_\lambda(i) = 1$$

Ainsi on en déduit qu'il existe μ tel que $\widetilde{\omega_\lambda} = \pm\chi_\mu$

Lemme 2.4 *Il existe un morphisme injectif de G-module de V_λ dans U_λ.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $V_\lambda = Aa_\lambda b_\lambda$ et $Ab_\lambda a_\lambda$ sont G-isomorphes. En effet, soit $\phi : (x \to xa_\lambda)$. On a bien ϕ linéaire et on vérifie que :

$$\phi\,(k \bullet x) = \phi\,(e_k x) = e_k x a_\lambda = k \bullet (xa_\lambda) = k \bullet \phi(x)$$

D'autre part $Im\,\phi = Aa_\lambda b_\lambda a_\lambda \twoheadrightarrow Aa_\lambda b_\lambda a_\lambda b_\lambda = Aa_\lambda b_\lambda$. Donc ϕ n'est pas l'application nulle et donc c'est un G-isomorphisme d'après le lemme de Schur.

Considérons alors l'application $\psi : \left(\begin{array}{ccc} Ab_\lambda a_\lambda & \to & U_\lambda \\ \left(\displaystyle\sum_{g \in S_d} c_g e_g \right) a_\lambda & \to & \displaystyle\sum_{g \in S_d} c_g e_{\overline{g}} \end{array} \right)$

Si $\left(\displaystyle\sum_{g \in S_d} c_g e_g \right) a_\lambda = 0$, alors en projetant sur e_σ, il vient $\displaystyle\sum_{k \in P_\lambda} c_{\sigma k^{-1}} = \sum_{k \in \sigma P_\lambda} c_k = 0$ et donc $\displaystyle\sum_{g \in S_d} c_g e_{\overline{g}} = 0$, ce qui prouve que ψ est bien définie.

ψ est clairement linéaire et on montre (de même) que ψ est injective.

Finalement, on a

$$\psi\left(k \bullet \left(\sum_{g \in S_d} c_g e_g \right) a_\lambda \right) = \psi\left(\left(\sum_{g \in S_d} c_g e_{kg} \right) a_\lambda \right) = \sum_{g \in S_d} c_g e_{\overline{kg}} = k \bullet \psi\left(\left(\sum_{g \in S_d} c_g e_g \right) a_\lambda \right)$$

Ce qui montre que ψ est un morphisme injectif de G-module et prouve le lemme. □

Montrons maintenant par une récurrence descendante que $\chi_\lambda = \widetilde{\omega_\lambda}$

Le cas $\lambda = (d, 0, \ldots, 0)$ a déjà été traité.

Sinon, on a vu que V_λ s'injecte dans U_λ donc il apparait dans la décomposition en représentation irréductible, ce qui se traduit par $n_{\lambda\lambda} \geq 1$.

Or on avait $\psi_\lambda = \widetilde{\omega_\lambda} + \displaystyle\sum_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} \widetilde{\omega_\mu} = \sum_{\mu \in \Omega} n_{\mu\lambda} \chi_\mu$

D'où il vient, par l'hypothèse de récurrence, :

$$\psi_\lambda = \widetilde{\omega_\lambda} + \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} \chi_\mu = \sum_{\mu \in \Omega} n_{\mu\lambda} \chi_\mu$$

On en déduit, en projetant sur χ_λ que $\widetilde{\omega_\lambda} = \chi_\lambda$, ce qui démontre la formule de Frobenius.