Un petit exercice

Xavier Caruso

1er avril 2002

Enoncé :

On considère 2001 réels, $x_1, \ldots, x_{2001}$, tels que pour tout sous-ensemble I de $\{1, \ldots, 2001\}$ de cardinal 7, il existe un sous-ensemble J de $\{1, \ldots, 2001\}$ de cardinal 11, vérifiant :

$$\frac{1}{7} \sum_{i \in I} x_i = \frac{1}{11} \sum_{j \in J} x_j$$

Montrer qu'alors tous les x_i sont égaux.

Démonstration :

Remarquons tout d'abord que quitte à tout translater, on peut supposer que $x_1 = 0$.

Supposons dans un premier temps que les x_i sont des entiers. Dans ce cas, si I est un sous-ensemble de $\{1, \ldots, 2001\}$ de cardinal 7, alors $11 \sum_{i \in I} x_i \equiv 0 \pmod 7$ et donc, puisque 7 et 11 sont premiers entre eux, $\sum_{i \in I} x_i \equiv 0 \pmod 7$. On en déduit que pour tout i, $x_i \equiv x_0 = 0 \pmod 7$, c'est-à-dire que tous les x_i sont des multiples de 7. Bien entendu la famille des $\frac{x_i}{7}$ est encore solution du problème. Par descente infinie, on montre finalement que tous les x_i sont nuls, ce qui est bien ce que l'on voulait.

Traitons maintenant le cas général. On procède par approximation.

Prenons une famille (x_i) de réels vérifiant la condition de l'énoncé. Notons N un entier strictement positif et supérieur à tous les inverses des $|x_i|$ pour x_i non nul. En appliquant le principe des tiroirs, on obtient un entier strictement positif D et des entiers relatifs p_i tels que $|Dx_i - p_i| \leqslant \frac{1}{155N}$ pour tout i. On peut bien entendu choisir $p_1 = 0$.

Montrons que la famille des p_i satisfait encore aux hypothèses de l'énoncé. Prenons donc I un sous-ensemble de $\{1, \ldots, 2001\}$ de cardinal 7. Alors on peut trouver un sous-ensemble J de $\{1, \ldots, 2001\}$ de cardinal 11 tel que :

$$11 \sum_{i \in I} Dx_i = 7 \sum_{j \in J} Dx_j$$

Regardons :

$$\begin{aligned} \left| 11 \sum_{i \in I} p_i - 7 \sum_{j \in J} p_j \right| &= \left| 11 \sum_{i \in I} (p_i - Dx_i) - 7 \sum_{j \in J} (p_j - Dx_j) \right| \\ &\leqslant 11 \sum_{i \in I} |p_i - Dx_i| + 7 \sum_{j \in J} |p_j - Dx_j| \leqslant \frac{154}{155N} < 1 \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité attendue, étant donné que le nombre dans le membre de gauche est un entier.

On en déduit par le cas précédent que tous les p_i sont nuls et donc que $|x_i| \leqslant |Dx_i| \leqslant \frac{1}{155N}$, ce qui est impossible si $x_i \neq 0$ par définition de N.