

Théorie des jeux

Xavier Caruso

Librement inspiré du cours d'Ivar Ekeland

Table des matières

1	Présentation	2
2	Préliminaires	2
2.1	Fonctions concaves	2
2.2	Comatrices	3
3	Théorème de Brouwer	3
3.1	Énoncé	4
3.2	Démonstration	4
3.3	Une petite généralisation utile	5
4	Théorème de Nash	7
4.1	Énoncé	7
4.2	Démonstration	7
4.3	Les jeux finis	8

1 Présentation

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Définition 1.0.1. Un jeu à n personnes est une famille $(K_i, u_i)_{1 \leq i \leq n}$ où K_i est un ensemble non vide et $u_i : K_1 \times \dots \times K_n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Un jeu modélise une situation où plusieurs personnes ont à prendre des décisions dont dépend un résultat qui les concerne. En effet, le joueur i choisit une décision $x_i \in K_i$. Autrement dit, K_i représente l'ensemble des décisions possible pour le joueur i . Une fois que toutes les décisions sont prises, il en résulte une situation globale commune mais appréciée différemment par chacun des joueurs. La quantité $u_i(x_1, \dots, x_n)$ mesure la satisfaction du joueur i face à la position (x_1, \dots, x_n) . Le joueur i va donc chercher à maximiser u_i .

Remarque 1.0.2. Si pour tous i et j , $u_i = u_j$, on a affaire à une situation de *coopération pure*. Si $n = 2$, et $u_1 + u_2 = 0$, on a affaire à une situation de *conflit pur*.

Définition 1.0.3. Avec les notations précédentes, on dit que $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ est un *équilibre* si pour tout i et pour tout $x_i \in K_i$, on a l'inégalité :

$$u_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq u_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n)$$

Remarque 1.0.4. La situation idéale serait l'existence et l'unicité de l'équilibre. La suite de ce document donne un critère facile à vérifier pour l'existence d'un équilibre.

2 Préliminaires

Lemme 2.0.1. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue et bijective entre deux espaces compacts. Alors f est un homéomorphisme.

Démonstration. Il suffit de montrer que f^{-1} est une application continue. Pour cela, considérons F un fermé de X . Alors F est compact et donc son image par f est également compacte et donc fermée. Autrement dit, l'image réciproque de tout fermé par f^{-1} est fermée, ce qui démontre le lemme. √

2.1 Fonctions concaves

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel normé, A une partie convexe de E et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

Rappel 2.1.1. Une partie A d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E est dite *convexe* si pour tous x et y dans A et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

Définition 2.1.2. On définit l'*épigraph* de f par :

$$\text{Epi}(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\} \subset E \times \mathbb{R}$$

Définition 2.1.3. f est dite *concave* si $\text{Epi}(-f)$ est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$. Ceci implique en particulier que A est convexe.

Remarque 2.1.4. Il revient au même de supposer que A est convexe et que pour tous x et y dans A et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a l'inégalité :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Définition 2.1.5. f est dite *strictement convexe* si A est convexe et pour tous x et y distincts dans A et tout $\lambda \in]0, 1[$, on a l'inégalité :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Proposition 2.1.6. On suppose toujours A convexe. On suppose en outre que $E = \mathbb{R}^n$, que A est compact et que f est continue et strictement concave. Alors f atteint son maximum sur A en un unique point.

Démonstration. Le fait que f atteigne son maximum résulte directement de la compacité de A . Notons M ce maximum et supposons qu'il existe x et y distincts tels que $f(x) = f(y) = M$. La stricte concavité donne alors l'inégalité suivante :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x) + f(y)}{2} = M$$

ce qui est absurde. ✓

En fait, ce résultat admet une généralisation beaucoup plus intéressante mais beaucoup plus difficile à énoncer et à démontrer :

Définition 2.1.7. Avec les notations précédentes, on dit que f est *semi-continue supérieurement* si $\text{Epi}(-f)$ est fermé dans $E \times \mathbb{R}$.

Définition 2.1.8. On appelle *dual topologique* de E et on note E^* , l'ensemble des formes linéaires continues de E .

Définition 2.1.9. On dit que E est *réflexif* si l'application :

$$\left(\begin{array}{l} E \rightarrow E^{**} \\ x \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(x)) \end{array} \right)$$

est bijective.

Théorème 2.1.10. On suppose que E est un espace de Banach réflexif, que A est un convexe fermé borné et que f est une fonction concave et semi-continue supérieurement. Alors f atteint son maximum sur A . En outre, si f est strictement concave, ce maximum est atteint en un unique point.

2.2 Comatrices

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée de taille n . Notons $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la comatrice de A .

On a alors l'égalité $A^t M = {}^t M A = (\det A) I_n$, ce qui donne pour tous i et k :

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} m_{ij} = \delta_{ik} \det A$$

(où δ est le symbole de Kronecker). En dérivant, on obtient pour tous i et j :

$$\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} = m_{ij}$$

et puis, avec des notations évidentes :

$$\frac{d}{dt} (\det A(t)) = \sum_{i,j} m_{ij}(t) \frac{d}{dt} a_{ij}(t)$$

3 Théorème de Brouwer

On note B^n (resp. \mathbb{S}^{n-1}) la boule unité fermée (resp. la sphère unité) de \mathbb{R}^n .

3.1 Enoncé

Théorème 3.1.1 (Brouwer). Soit $f : B^n \rightarrow B^n$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe.

3.2 Démonstration

Théorème 3.2.1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe \mathcal{C}^1 , telle qu'il existe un $R > 0$ vérifiant la condition $(I)_R$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (\|x\| \geq R) \Rightarrow (\varphi(x) = x)$$

On appelle J_φ le jacobien de φ , alors pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue à support compact, on a la formule suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \circ \varphi(x) J_\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

Démonstration. Nous allons traiter dans un premier temps le cas où la fonction φ est de classe \mathcal{C}^2 et la fonction f de classe \mathcal{C}^1 .

Lemme 3.2.2. Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n , I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) : I \times U \rightarrow V$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Pour tout $t \in I$, on définit la fonction ψ_t par $\psi_t(x) = \psi(t, x)$. On note finalement $(M_{ij}(x, t))_{1 \leq i, j \leq n}$ la comatrice de $\left(\frac{\partial \psi_i(x, t)}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$. On a alors la formule suivante :

$$\forall (t, x) \in I \times U, \quad \frac{\partial}{\partial t} [f \circ \psi(x, t) J_{\psi_t}(x)] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[f \circ \psi(x, t) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial t}(x, t) M_{ij}(x, t) \right]$$

Démonstration. Il suffit de calculer en prenant en compte le rappel sur les comatrices. ✓

Lemme 3.2.3. Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $\psi : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On suppose que pour tout $t \in I$, ψ_t satisfait la condition $(I)_R$ (où R ne dépend pas de t) et que f est à support compact. Alors la quantité

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \circ \psi_t(x) J_{\psi_t}(x) dx_1 \dots dx_n$$

est indépendante de $t \in I$.

Démonstration. L'intégrande est une fonction de classe \mathcal{C}^1 de $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$, nulle en dehors de $I \times K$ où K est un compact. Ainsi c'est une fonction dérivable de $t \in I$, de dérivée :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} [f \circ \psi_t(x) J_{\psi_t}(x)] dx_1 \dots dx_n$$

On applique alors le lemme précédent en se souvenant que si $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à support compact et de classe \mathcal{C}^1 , on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_n = 0$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer le lemme précédent à : ✓

$$\psi : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ (t, x) & \mapsto & (1-t)x + t\varphi(x) \end{pmatrix}$$

et d'écrire l'égalité des intégrales pour $t = 0$ et $t = 1$.

Dans le cas général, il suffit d'approcher φ par des fonctions de classe \mathcal{C}^2 et φ par des fonctions de classe \mathcal{C}^1 . On vérifie que tout marche bien. (NDLR : si vous ne savez pas faire ça, je peux détailler mais bon...) ✓

Remarque 3.2.4. Ce n'est pas la formule du changement de variable. En effet, il n'y a pas de valeur absolue et φ n'a pas besoin d'être un difféomorphisme.

Corollaire 3.2.5. Toute application $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue qui coïncide avec l'identité en dehors d'un compact est surjective.

Démonstration. On traite tout d'abord le cas φ est de classe \mathcal{C}^1 . Soit R un réel vérifiant la condition $(I)_R$. On a alors $\varphi(\mathbb{R}^n) = \varphi(\bar{B}(0, R)) \cup \varphi(\mathbb{R}^n - B(0, R))$ qui est un fermé. Supposons que $\mathbb{R}^n - \varphi(\mathbb{R}^n)$ ne soit pas vide. Alors comme il ouvert il contient une boule fermée $\bar{B}(y, \varepsilon)$ où $\varepsilon > 0$. On applique alors le théorème précédent à une fonction f non nulle, positive et donc le support est inclus dans $\bar{B}(y, \varepsilon)$, ce qui donne immédiatement une contradiction.

Pour le cas général, on montre que l'on peut trouver une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 qui coïncident avec l'identité en dehors d'un compact et qui converge uniformément vers φ . (NDLR : euh si vous savez pas faire ça je peux détailler mais bon...). On conclut alors par un argument de compacité. ✓

Corollaire 3.2.6. Soit $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. On suppose que $f|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \text{Id}$. Alors $f(B^n) \supset B^n$.

Démonstration. Il suffit de prolonger f par l'identité sur $\mathbb{R}^n - B^n$ et d'appliquer le corollaire précédent. ✓

Corollaire 3.2.7. Il n'existe pas de rétraction continue de B^n sur \mathbb{S}^{n-1} . Autrement dit, il n'existe pas d'application continue $f : B^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ telle que $f|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \text{Id}$

Démonstration. Immédiat d'après le corollaire précédent. ✓

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème de Brouwer. Supposons que $g : B^n \rightarrow B^n$ soit une application continue qui n'admette pas de point fixe. Alors pour tout x , on peut considérer la demi-droite issue de $g(x)$ et passant par x . Elle coupe la sphère \mathbb{S}^{n-1} en un unique point $f(x)$. On construit ainsi une application $f : B^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ qui coïncide avec l'identité sur \mathbb{S}^{n-1} . On vérifie facilement qu'elle est continue, ce qui est impossible d'après le corollaire 3.2.7

3.3 Une petite généralisation utile

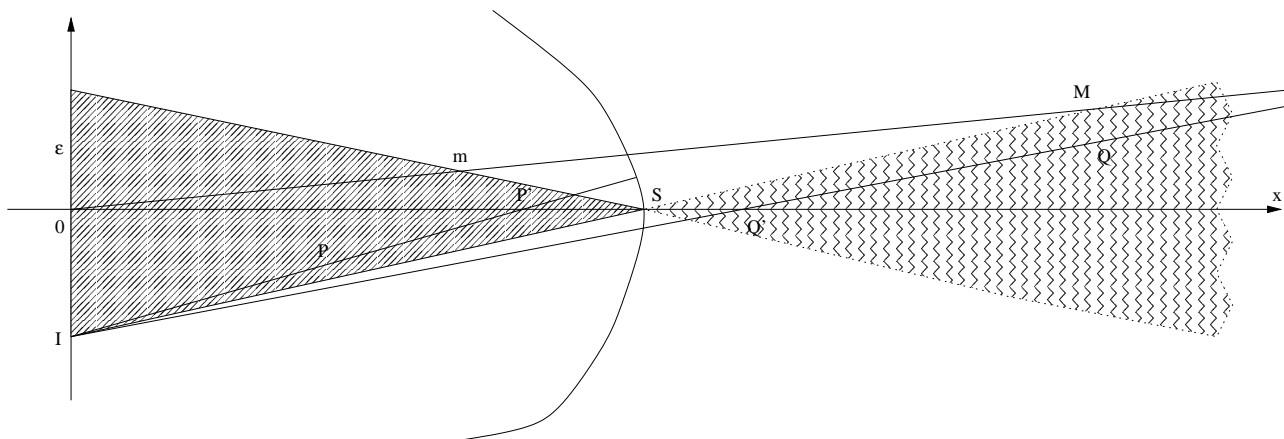
Lemme 3.3.1. Soit K un compact convexe de \mathbb{R}^n d'intérieur non vide. Alors K est homéomorphe à B^n .

Démonstration. Quitte à tout translater, on peut supposer que 0 est un point intérieur de K . Considérons l'application suivante :

$$\tilde{\varphi} : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ u & \mapsto & \sup \{ t \geq 0 \mid tu \in K \} \end{array} \right)$$

Notons que comme K est borné l'ensemble des t tels que $tu \in K$ est borné. D'autre part, il contient 0 et donc est non vide. Ainsi la borne supérieure existe bien. Le fait que K soit fermé prouve en fait que cette borne supérieure est un maximum. D'autre part, comme 0 est un point intérieur, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \subset K$ et donc pour tout $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\tilde{\varphi}(u) \geq \varepsilon$ et donc $\tilde{\varphi}$ arrive bien dans \mathbb{R}_+^* .

Montrons que $\tilde{\varphi}$ est continue. Pour cela, considérons un vecteur $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$. Soit $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ suffisamment proche de u_0 (ie de sorte que le dessin suivant soit valable).



Notons I un point tel que $OI = \varepsilon$, \overrightarrow{OI} soit orthogonal à u_0 et u_0 , u et \overrightarrow{OI} soient coplanaires. Notons également S le point tel que $\overrightarrow{OS} = \tilde{\varphi}(u_0)u_0$. Par convexité, le segment $[OS]$ est inclus dans K . Nous allons prouver que tous les points de la partie hachurée (à gauche) appartiennent à K . En effet, remarquons tout d'abord que le point I appartient à K . Soit P dans cette partie. Supposons sans perte de généralité que P est du même côté de la droite (Ox) que I . Alors la droite (IP) recoupe l'axe (Ox) en un point P' du segment $[OS]$ et puis par convexité P appartient bien à K .

Montrons alors que les points de la partie barrée (à droite) n'appartiennent pas à K . Pour cela considérons un point Q de cette partie que l'on peut supposer de l'autre côté de la droite (Ox) que I . Le segment $[IQ]$ recoupe alors l'axe (Ox) en un point Q' de la demi-droite $]Sx)$ et donc qui n'appartient pas à K . Par conséquent, le point Q n'appartient pas non plus à K car sinon par convexité Q' appartiendrait à K .

On en déduit que $Om \leq \tilde{\varphi}(u) \leq OM$. Les distances Om et OM ne dépendent que de l'angle que fait u avec u_0 (donc en fait que du produit scalaire $\langle u, u_0 \rangle$) et tend vers $\tilde{\varphi}(u_0)$ quand cet angle tendent vers 0. Ceci prouve que la fonction $\tilde{\varphi}$ est continue en u_0 .

Pour conclure, il suffit de considérer :

$$\varphi : \begin{pmatrix} B^n & \rightarrow & K \\ u & \mapsto & \tilde{\varphi}\left(\frac{u}{\|u\|}\right)u \text{ si } u \neq 0 \\ 0 & \mapsto & 0 \end{pmatrix}$$

On voit facilement φ est bijective. Le lemme 2.0.1 montre qu'il suffit alors de prouver que φ est continue pour pouvoir conclure. La continuité en un point non nul résulte directement de celle de $\tilde{\varphi}$ tandis que la continuité en 0 résulte de la bornitude de $\tilde{\varphi}$. En effet, son image est l'image continue d'un compact. \checkmark

Lemme 3.3.2. Soit K un compact convexe non vide de \mathbb{R}^n . On suppose que K est d'intérieur vide. Alors K est inclus dans un hyperplan affine.

Démonstration. Quitte à tout translater, on peut supposer que $0 \in K$. Supposons alors que K ne soit inclus dans aucun hyperplan affine. Comme $0 \in K$, il revient au même de supposer que K n'est inclus dans aucun hyperplan vectoriel, ce qui revient à dire que l'on peut construire (e_1, \dots, e_n) une base de \mathbb{R}^n d'éléments de K . Par convexité, si tous les $\lambda_i \leq \frac{1}{n}$, on a $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in K$. Autrement dit l'ensemble $\Omega = \{x \in E \mid \forall i, e_i^*(x) \in]0, \frac{1}{n}[\}$ est inclus dans K (où (e_1^*, \dots, e_n^*) désigne la base duale de (e_1, \dots, e_n)). D'autre part, on voit que la condition définissant Ω est ouverte, ce qui prouve que K contient un ouvert et donc est d'intérieur non vide. Ceci prouve le lemme. \checkmark

Lemme 3.3.3. Soit K un compact convexe non vide de \mathbb{R}^n . Alors K est homéomorphe à B^k pour un certain $k \leq n$

Démonstration. Si K est d'intérieur non vide, le lemme 3.3.1 permet de conclure en prenant $k = n$. Sinon, le lemme 3.3.2 prouve que K est inclus dans un hyperplan affine, lui-même homéomorphe à \mathbb{R}^{n-1} . On conclut alors par récurrence. \checkmark

Théorème 3.3.4. Soient K un compact convexe non vide de \mathbb{R}^n et $f : K \rightarrow K$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe.

Démonstration. D'après le lemme précédent, K est homéomorphe à B^k pour un certain k . Notons $\varphi : B^k \rightarrow K$ l'homéomorphisme. Alors l'application $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : B^k \rightarrow B^k$ est continue et donc admet un point fixe $x \in B^k$ d'après le théorème de Brouwer. Il ne reste plus qu'à vérifier que $\varphi(x)$ est un point fixe de f . \checkmark

4 Théorème de Nash

Pour toute la suite, on considère n un entier supérieur ou égal à 2 et (K_i, u_i) un jeu à n personnes.

4.1 Énoncé

Théorème 4.1.1 (Nash). On suppose que :

1. les K_i sont des convexes compacts de \mathbb{R}^{n_i} pour un certain n_i ,
2. les u_i sont continues,
3. pour tout i et pour tout $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in K_1 \times \dots \times K_{i-1} \times K_{i+1} \times \dots \times K_n$, la fonction $x_i \mapsto u_i(x_1, \dots, x_n)$ est concave.

Alors le jeu (K_i, u_i) possède un équilibre.

4.2 Démonstration

On suppose dans un premier temps que les fonctions $x_i \mapsto u_i(x_1, \dots, x_n)$ sont strictement concaves. Alors d'après la proposition 2.1.6, toutes ces fonctions admettent un maximum qui est atteint en un unique point, disons $M_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. On a ainsi défini des fonctions :

$$M_i : \prod_{j \neq i} K_j \rightarrow K_i$$

Fixons un entier i . Un point $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in F = \prod_{i=1}^n K_i$ appartient au graphe de l'application M_i si et seulement si :

$$\forall x_i \in K_i, \quad u_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) \leq u_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

On reconnaît ici une condition fermée et donc le graphe de M_i est compact. En fait, ceci suffit à prouver que M_i est continue. En effet, notons Γ_i le graphe de M_i et $p : \Gamma_i \rightarrow \prod_{j \neq i} K_j$ la projection canonique. p est alors continue et bijective. Le lemme 2.0.1 prouve alors que p^{-1} est continue. Mais p^{-1} n'est autre, à permutation près, que l'application $x \mapsto (x, M_i(x))$. Finalement M_i est bien continue.

On considère maintenant l'application :

$$M : \left(\begin{array}{ccc} F & \rightarrow & F \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (M_1(x_2, \dots, x_n), \dots, M_n(x_1, \dots, x_{n-1})) \end{array} \right)$$

D'après le théorème 3.3.4, M admet un point fixe $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. On vérifie alors facilement qu'il s'agit d'un équilibre.

Remarque 4.2.1. Pour utiliser le théorème 3.3.4, on a besoin de vérifier que K est un compact non vide.

Il est toujours vrai qu'un produit fini d'ensembles non vides est non vide. Il est intéressant de remarquer que le fait qu'un produit quelconque d'ensembles non vides soit non vide est exactement une reformulation de l'axiome du choix.

Il est toujours vrai qu'un produit fini d'espaces topologiques compacts est compact et cela est facile à vérifier dans les cas de \mathbb{R}^n en utilisant la caractérisation séquentielle de Bolzano-Weierstrass. Le résultat reste vrai pour un produit quelconque. C'est le théorème de Tychonoff qui est en fait équivalent à l'axiome du choix.

Dans le cas où les fonctions $x_i \mapsto u_i(x_1, \dots, x_n)$ ne sont plus strictement concaves, on définit pour tout $N > 0$ les fonctions :

$$u_i^N(x_1, \dots, x_n) = u_i(x_1, \dots, x_n) - \frac{1}{N} \|x_i\|^2$$

Pour tout N , le jeu (K_i, u_i^N) vérifie les hypothèses du cas précédent et donc admet un équilibre $(\bar{x}_1^N, \dots, \bar{x}_n^N)$. Grâce à la compacité de K , on peut extraire une sous-suite de sorte que tous les $x_i^{\varphi(N)}$ convergent. La limite fournit alors un équilibre.

4.3 Les jeux finis

Définition 4.3.1. Le jeu (K_i, u_i) est dit *fini* si tous les ensembles K_i sont finis.

Dans ce cas, le théorème de Nash ne s'applique pas. En effet, un ensemble fini non vide n'est convexe que s'il compte un unique élément. Toutefois, il est encore possible de dire des choses.

On suppose désormais que les K_i sont des ensembles finis de cardinal n_i et on note $K_i = \{x_1, \dots, x_{n_i}\}$.

Définition 4.3.2. On appelle *stratégie mixte pour le joueur i* un n_i -uplet $(p_i^1, \dots, p_i^{n_i})$ tel que pour tout k , $p_i^k \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{n_i} p_i^k = 1$. On note Σ_i leur ensemble.

On identifie x_i^k à $(\delta_{1k}, \dots, \delta_{n_i, k})$ (où δ désigne le symbole de Kronecker). On peut ainsi dire que $K_i \subset \Sigma_i$.

On définit les fonctions $\tilde{u}_i : \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\tilde{u}_i(p_1, \dots, p_n) = \sum_{\substack{1 \leq k_1 \leq n_1 \\ \vdots \\ 1 \leq k_n \leq n_n}} u_i(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}) p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$$

Définition 4.3.3. Le jeu (Σ_i, \tilde{u}_i) ainsi formé s'appelle *l'extension mixte* du jeu fini (K_i, u_i) .

Théorème 4.3.4 (Nash). L'extension mixte d'un jeu fini admet toujours un équilibre.

Démonstration. Il suffit de vérifier que le jeu (Σ_i, \tilde{u}_i) vérifie les hypothèses du premier théorème de Nash. C'est immédiat. ✓