Un petit exercice

Xavier Caruso

Enoncé :
Pour tous entiers positifs ou nuls n et i tels que $n \leqslant i$, on note $P_{n,i} = (1-X)^i X^{n-i}$. Soit P un polynôme non nul à coefficients réels. Alors P s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients positifs des $P_{n,i}$ si et seulement si P est strictement positif sur l'intervalle ouvert $I =]0,1[$.

Démonstration :
Le sens direct est évident... Il est là juste pour bien montrer que l'on aura du mal à affaiblir les hypothèses :-).

Pour la réciproque, traitons tout d'abord le cas où $P(X) = (X-\lambda)^2 + \varepsilon$ où $0 < \lambda < 1$ et $\varepsilon > 0$. Tout d'abord quelques notations : on définit a et b par $P(X) = X^2 + aX + b$ et on pose $\alpha = P(0) > 0$ et $\beta = P(1) > 0$. P s'écrit alors $P(X) = X^2 + (\beta - \alpha - 1)X + \alpha$.

Fixons pour l'instant un entier $n \geqslant 2$. On remarque que $(P_{n,i})_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré plus petit que n) et que la matrice de passage de cette base à la base $(X^n, \dots, X, 1)$ est $A = \left((-1)^{i+j}\,\mathrm{C}_j^i\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec la convention $\mathrm{C}_j^i = 0$ si $i > j$ ou $i < 0$.

Cette matrice est aussi la matrice de l'application linéaire $P(X) \mapsto P(X-1)$ écrite dans la base $(1, X, \dots, X^n)$. L'inverse est donc donné par $A^{-1} = \left(\mathrm{C}_j^i\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$. Les coefficients qui apparaissent dans la décomposition de P dans la base des $(P_{n,i})$ sont donc :

$$\mathrm{C}_{n-2}^k + a\mathrm{C}_{n-1}^k + b\mathrm{C}_n^k = \alpha\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} + \beta\mathrm{C}_{n-1}^k - \mathrm{C}_{n-2}^{k-1}$$

pour k entier allant de 1 à $n-1$ (on vérifie les cas $k=0$ et $k=n$ à part qui redonnent $\alpha \geqslant 0$ et $beta \geqslant 0$).

Pour que tous ces coefficients soient positifs ou nuls, il suffit donc que pout tout entier k entre 1 et $n-1$:

$$\alpha\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \beta\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} - \frac{(n-2)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} \geqslant 0$$

soit en simplifiant :

$$\frac{\alpha}{n-k} + \frac{\beta}{k} \geqslant \frac{1}{n-1}$$

En multipliant par n et en posant $t = \frac{k}{n}$, on obtient la condition suffisante suivante :

$$\forall t \in I, \quad \frac{\alpha}{1-t} + \frac{\beta}{t} \geqslant \frac{n}{n-1}$$

D'autre part, on a bien sûr $\left[t\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)-\sqrt{\alpha}\right]^2 \geqslant 0$, et donc en développant, en bidouillant et en divisant par $t\,(1-t)$, on obtient :

$$\forall t \in I, \quad \frac{\alpha}{1-t}+\frac{\beta}{t} \geqslant \left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2$$

En particulier, si $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}}$, tous les coefficients de la décomposition seront positifs et le théorème est démontré. Comme $\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)$ est une suite décroissante de limite 1, pour avoir le cas particulier énoncé, il suffit de prouver que l'on a toujours $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} > 1$. Mais cela est vrai, car l'on a :

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} = \sqrt{\lambda^2+\varepsilon}+\sqrt{(1-\lambda)^2+\varepsilon} > \lambda + 1 - \lambda = 1$$

Pour le cas général, on remarque tout d'abord que, quitte à diviser par le coefficient dominant, on peut supposer que le polynôme P est unitaire.

On procède par récurrence sur le dégré du polynôme. S'il est de degré 0, ce n'est pas très difficile. Prenons maintenant un polynôme P unitaire de degré n strictement positif sur I. Notons μ le minimum de P sur $[0,1]$. Le polynôme $P-\mu$ est strictement positif sur I et s'annule sur $[0,1]$.

On écrit alors :

$$P\,(X) = \mu + X^p\,(1-X)^q \prod_{i=1}^{k} (X-\lambda_i)^{2\alpha_i}\; Q\,(X)$$

où p, q et k sont des entiers éventuellement nuls (mais pas tous les trois simultanément), les α_i sont des entiers strictement positifs (les racines de P dans I sont de multiplicité paire car P ne change pas de signe dans leur voisinage) et Q est un polynôme strictement positif sur I.

Si $k=0$, alors on applique l'hypothèse de récurrence à Q et on conclut en remarquant que les $(P_{n,i})$ sont stables par produit.

Supposons donc que $k>0$. On a alors forcément $\mu>0$. On prend $\varepsilon>0$ et on écrit :

$$P\,(X) = R\,(\varepsilon, X) + X^p\,(1-X)^q \prod_{i=1}^{k} \left[(X-\lambda_i)^{2\alpha_i}+\varepsilon\right]\; Q\,(X)$$

On voit facilement que le coefficient constant de $R\,(\varepsilon, X)$ vu comme polynôme en ε est $\mu>0$ donc en particulier pour un certain $\varepsilon>0$ il va être strictement positif sur $[0,1]$.

On considère alors ce ε. En regardant les coefficients en degré n, on voit que R est de degré strictement inférieur à n. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à Q et R et le cas précédent aux polynômes $(X-\lambda_i)^{2\alpha_i}+\varepsilon$, ce qui permet de conclure.