S-schémas en R-modules

Xavier Caruso

Table des matières

1 Préliminaires sur les catégories

1.1 Définitions générales

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée :
- d'une classe d'objets que l'on souvent $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$
- si A et B sont deux objets de $\mathcal{C}$, d'un ensemble $\mathrm{Hom}\,(A,B)$; les éléments de cet ensemble sont appelés les *morphismes* ou les *flèches* de A dans B
- d'une loi de composition $\circ$: $\mathrm{Hom}\,(B,C)\times\mathrm{Hom}\,(A,B)\to\mathrm{Hom}\,(A,C)$ pour tous objets A, B et C, vérifiant :
  1. si A, B, C, D sont trois objets, $f\in\mathrm{Hom}\,(A,B)$, $g\in\mathrm{Hom}\,(B,C)$ et $h\in\mathrm{Hom}\,(C,D)$, on a $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$
  2. pour tout objet A, il existe un élément de $\mathrm{Hom}\,(A,A)$ que l'on note id_A tel que pour tout objet X, toute flèche $f\in\mathrm{Hom}\,(A,X)$, et toute flèche $g\in\mathrm{Hom}\,(X,A)$, on ait $\mathrm{id}_A\circ f=f$ et $g\circ\mathrm{id}_A=g$.

Soit donc $\mathcal{C}$ une catégorie. Soient A et B deux objets de $\mathcal{C}$ et $f: A\to B$ (ceci signifie exactement $f\in\mathrm{Hom}\,(A,B)$). On dit que f est un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $g: B\to A$ vérifiant $f\circ g=\mathrm{id}_B$ et $g\circ f=\mathrm{id}_A$. En particulier, si A est un objet de $\mathcal{C}$, le morphisme id_A est toujours un isomorphisme.

On dit que f est un *monomorphisme* si pour tout objet X et tous $g,h: X\to A$, l'égalite $f\circ g=f\circ h$ implique $g=h$.

On dit que f est un *épimorphisme* si pour tout objet X et tous $g,h: A\to X$, l'égalite $g\circ f=h\circ f$ implique $g=h$.

Il est faux en général qu'un morphisme qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme est un isomorphisme. Pour s'en convaincre, il suffit de bricoler une catégorie avec peu d'objets. On verra une classe de contre-exemples un peu plus loin.

Donnons à présent des exemples fondamentaux. Le plus important est sans doute celui de la catégorie des ensembles que l'on note $\underline{\mathrm{Set}}$ (ou parfois $\underline{\mathrm{Ens}}$). Les objets de cette catégories sont tous les ensembles et si A et B sont deux ensembles, $\mathrm{Hom}\,(A,B)$ est constitué de toutes les applications[1] de A dans B. La loi $\circ$ est alors tout simplement la composition simple des applications. Bien entendu, elle vérifie que l'on a donné plus haut. Dans $\underline{\mathrm{Set}}$, les monomorphismes sont exactement les applications injectives, les épimorphismes les applications surjectives et les isomorphismes sont les applications bijectives. La vérification de ces assertions est simple et laissée au lecteur.

Un autre exemple important est celui de la catégorie des R-modules où R désigne disons un anneau commutatif unitaire. On la note en général $\mathrm{Mod}\,(R)$. Ses objets sont les R-modules et si A et B sont deux R-modules, l'ensemble $\mathrm{Hom}\,(A,B)$ consiste en les applications R-linéaires de A dans B. Là aussi, il est facile de vérifier que les monomorphismes correspondent aux applications injectives, les épimorphismes aux applications surjectives et les isomorphismes aux applications bijectives.

Donnons finalement un dernier exemple très différent. Considérons $(E,\leqslant)$ un ensemble muni d'un préordre. On peut lui associer une catégorie que l'on notera $E_{\leqslant}$. Ses objets sont les éléments de E et si x et y appartiennent à E, l'ensemble $\mathrm{Hom}\,(x,y)$ sera réduit à un élément si $x\leqslant y$ et sera vide sinon. Voyons comment l'on construit la loi de composition. Prenons donc x, y et z trois éléments de E, si $x\nleqslant y$ ou $y\nleqslant z$ l'ensemble $\mathrm{Hom}\,(x,y)\times\mathrm{Hom}\,(y,z)$ est vide et donc il n'y a rien à faire. Si maintenant $x\leqslant y\leqslant z$, alors l'ensemble $\mathrm{Hom}\,(x,y)\times\mathrm{Hom}\,(y,z)$ est réduit à un élément et il faut donner son image par $\circ$. Mais celle-ci doit appartenir à $\mathrm{Hom}\,(y,z)$ qui est aussi un ensemble réduit à un élément, donc on n'a pas trop le choix. Le lecteur pourra vérifier que $\circ$ est bien associative et que si $x\in E$, l'unique élément de $\mathrm{Hom}\,(x,x)$ possède bien les propriétés de id_x. Dans cette catégorie, toutes les flèches sont des monomorphismes et des épimorphismes. Par contre, pour $x,y\in E$, $x\leqslant y$, l'élément de $\mathrm{Hom}\,(x,y)$ est un isomorphisme si et seulement si $y\leqslant x$, c'est-à-dire si x et y sont associés. En particulier si $\leqslant$ est un ordre sur E, les seuls isomorphismes sont les identités.

Considérons à présent une catégorie $\mathcal{C}$. Parfois, elle admet des objets particuliers. Par exemple, il peut arriver qu'il existe un objet I tel que pour tout objet X, l'ensemble $\mathrm{Hom}\,(I,X)$ soit réduit à un point. Un tel objet s'appelle un *objet initial*. De façon duale, il peut exister un objet F tel que les ensemble $\mathrm{Hom}\,(X,F)$ soit réduit à un point quelque soit l'objet X que l'on choisisse. Un tel objet est appelé un *objet final*. Un objet à la fois initial et final est un *objet nul*.

Ces objets comme nous allons le voir jouent un rôle extrémement important. Ils n'existent pas toujours mais par contre si I et I' sont deux objets initiaux (resp. F et F' sont deux objets finaux), alors il existe un

[1] Rappelons qu'une application est définie sur tous les éléments de l'ensemble de départ.

unique isomorphisme $\varphi : I \to I'$ (resp. $\varphi : F \to F'$). On dit que l'objet initial (resp. objet final) est *unique à isomorphisme unique près.* Cette notion d'unicité à isomorphisme unique près est capitale dans la théorie des catégories. En effet, il est totalement illusoire d'espérer d'avoir des résultats d'unicité sur les objets de X. L'unicité à isomorphisme près quant à elle est une notion trop souple. En effet, s'il y a plusieurs façons d'identifier les deux objets en question, on ne peut pas parler d'unicité. Pour palier à ce problème, on suppose que ce genre de confusion ne pourra pas apparaître tout simplement en imposant l'unicité de l'identification entre les deux objets en question, ce qui correspond bien à la notion présentée.

Revenons dans des considérations plus *terre à terre* et montrons par exemple que l'objet initial est bien unique à isomorphisme unique près. Soient donc I et I' deux objets initiaux. Comme I est initial, il existe un unique flèche de I vers I'. Il s'agit donc juste de voir que celle-ci, disons f, est en fait un isomorphisme. Cherchons-lui un inverse. Ce sera forcément une flèche de I' dans I, mais comme I' est initial, il n'y a qu'une telle flèche. Prenons donc celle-là et appelons-la g. La composée $f \circ g$ sera une flèche de I' dans lui-même. Mais là encore, il n'y a qu'une telle flèche et d'après les axiomes définissant une catégorie, c'est forcément $\mathrm{id}_{I'}$, d'où $f \circ g = \mathrm{id}_{I'}$. De même, on prouve que $g \circ f = \mathrm{id}_I$ et donc que f est bien un isomorphisme.

Regardons ce qu'il en est sur les catégories que nous avons présentées tout à l'heure. Il est en facile de voir que dans Set, les objets initiaux sont les singletons, l'objet final est l'ensemble vide. On en déduit que Set n'admet pas d'objet nul. Dans $\mathrm{Mod}\,(R)$, le R-module réduit à $\{0\}$ est à la fois objet initial et final. Si $(E, \leqslant)$ est un ensemble pré-ordonné, un objet initial de $E_{\leqslant}$ sera un plus petit élément de E alors qu'un objet final sera un plus grand élément.

Il est possible de définir pleins d'objets très intéressants dans une catégorie. Toutes ces définitions reposent principalement sur le même principe qui est celui de propriété universelle que nous allons illustrer par la suite. Nous nous cantonnerons ici à définir somme et produit.

Commençons par le produit. Prenons deux objets de $\mathcal{C}$, disons A et B. Un *produit* de A par B est en fait la donnée d'un objet de $\mathcal{C}$ que l'on note en général $A \times B$ et de deux morphismes $\pi_A : A \times B \to A$ et $\pi_B : A \times B \to B$ que l'on appelle *projections canoniques*, tout cela vérifiant la propriété suivante : pour tout objet X de $\mathcal{C}$, toute flèche $f : X \to A$ et toute flèche $g : X \to B$, il existe une unique flèche $X \to A \times B$ que l'on note en général $f \times g$ telle que $\pi_A \circ (f \times g) = f$ et $\pi_B \circ (f \times g) = g$.

Moralement on vient de définit un nouvel objet $A \times B$ qui a la propriété que se donner une flèche vers A et une flèche vers B revient à se donner une flèche vers $A \times B$.

Il est intéressant ici d'adopter une vision relative. Pour cela, introduisons la catégorie $\mathcal{C}_{A,B}$ dont les objets sont les triplets $(X, \varphi_A, \varphi_B)$ où X est un objet de $\mathcal{C}$, $\varphi_A \in \mathrm{Hom}\,(X, A)$ et $\varphi_B \in \mathrm{Hom}\,(X, B)$. Les morphismes entre $(X, \varphi_A, \varphi_B)$ et (Y, ψ_A, ψ_B) sont les flèches de $f : X \to Y$ faisant commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi_A"'] & & Y \arrow[dl, "\psi_A"] \\ & A & \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi_B"'] & & Y \arrow[dl, "\psi_B"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Il n'y a pas à ma connaissance de définition précise de *diagramme commutatif.* Enfin en général, il faut comprendre que quelque soit les flèches que l'on suive pour aller d'un objet à un autre, on obtient toujours en composant le même morphisme. Par exemple, ici le premier diagramme signifie que $\psi_A \circ f = \varphi_A$ alors que le second donne $\psi_B \circ f = \varphi_B$. Malheureusement, ce n'est pas toujours si simple mais souvent dès qu'un diagramme prête facilement à confusion, l'auteur précise sa pensée en écrivant une petite phrase à côté.

Revenons à nos moutons. Ce que l'on peut constater c'est que le produit de A par B vit naturellement dans cette nouvelle catégorie que nous venons de considérer. On a même mieux, simplement en transposant la définition, on voit qu'un produit de A par B n'est autre qu'un objet final de $\mathcal{C}_{A,B}$. Cela permet de démontrer sans se fatiguer plus, qu'un produit est unique à isomorphisme unique près.

En dualisant tout cela, on obtient la notion de somme : une *somme* de A par B est en fait d'un objet de $\mathcal{C}$ que l'on note en général $A \coprod B$ (ou $A \oplus B$) et de deux morphismes $\iota_A : A \to A \coprod B$ et $\iota_B : B \to A \coprod B$ que l'on appelle *injections canoniques*, tout cela vérifiant la propriété suivante : pour tout objet X de $\mathcal{C}$, toute flèche $f : A \to X$ et toute flèche $g : B \to X$, il existe une unique flèche $A \coprod B \to X$ que l'on note en général $f \coprod g$ telle que $(f \coprod g) \circ \iota_A = f$ et $(f \coprod g) \circ \iota_B = g$.

Comme précedemment, on peut développer une vision relative, les sommes seront ainsi vues comme des objets initiaux.

Nous laissons le lecteur voir par lui-même que dans Set le produit correspond bien au produit d'ensembles tel qu'on le connaît, la somme correspond en fait à l'union disjointe, que dans $\mathrm{Mod}(R)$ le produit et la somme coïncident et correspondent à ce que l'on appelle communément la somme directe, et finalement que dans $E_{\leqslant}$ (où $(E, \leqslant)$ est un pré-ordre), le produit correspond à la borne supérieure et la somme à la borne inférieure.

On peut un peu formaliser la notion de dualité dont on parle depuis tout à l'heure. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, on peut définir ce que l'on appelle sa *catégorie opposée* et que l'on note $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Les objets de celle-ci sont les mêmes que les objets de $\mathcal{C}$ mais les flèches sont renversées. Autrement dit si X et Y sont deux objets de $\mathcal{C}$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Il n'y a aucun problème pour définir la composition et vérifier que $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ est bien une catégorie.

On remarque alors que les monomorphismes de $\mathcal{C}$ correspondent aux épimorphismes de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ (et réciproquement), qu'un objet initial de $\mathcal{C}$ est un objet final de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ (et réciproquement), qu'un produit de A par B dans $\mathcal{C}$ est une somme de A par B dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ (et réciproquement). Plus généralement, à chaque notion que l'on peut introduire dans $\mathcal{C}$, il correspond une notion duale en la regardant dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

1.2 Les foncteurs

Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux catégories, un foncteur $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ est la donnée pour tout objet A de $\mathcal{C}_1$ d'un objet $F(A)$ de $\mathcal{C}_2$ et de pour tous objets A et B de $\mathcal{C}_1$ et toute flèche $f : A \to B$, d'une flèche $F(f) : F(A) \to F(B)$, tout cela respectant la composition et les flèches identités.

Par définition un foncteur contravariant de $\mathcal{C}_1$ dans $\mathcal{C}_2$ n'est autre qu'un foncteur de $\mathcal{C}_1^{\mathrm{op}}$ dans $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_1^{\mathrm{op}}$ désignant la catégorie opposée de $\mathcal{C}_1$.

Donnons tout de suite une série de définitions :

Définition 1.2.1. Soit $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ un foncteur.

1. On dit que F est *fidèle* si pour tous objets de $\mathcal{C}_1$ A et B, l'application $\mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ induite par F est injective.
2. On dit que F est *plein* si pour tous objets fr $\mathcal{C}_1$ A et B, l'application $\mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ induite par F est surjective.
3. On dit que F est *pleinement fidèle* si pour tous objets de $\mathcal{C}_1$ A et B, l'application $\mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ induite par F est bijective.

Il est intéressant de noter que la notion de pleine fidélité est à rapprocher de l'idée intuitive d'injectivité. En effet si $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ est un foncteur pleinement fidèle, et si A et B sont des objets de $\mathcal{C}_1$ tels que $F(A)$ est isomorphe à $F(B)$, alors A et B étaient en fait déjà isomorphes. Cela n'est pas difficile à voir. Notons $f_2 : F(A) \to F(B)$ un isomorphisme et notons g_2 un inverse de f_2. Comme notre foncteur F est plein, ces deux flèches se relèvent en $f_1 : A \to B$ et $g_1 : B \to A$ et on a $F(f_1 \circ g_1) = \mathrm{id}_{F(B)} = F(\mathrm{id}_B)$ et $F(g_1 \circ f_1) = \mathrm{id}_{F(A)} = F(\mathrm{id}_A)$. On invoque alors la fidélité de F qui permet de prouver que f_1 et g_1 sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre entre A et B.

On peut même apporter un petit raffinement à ce résultat, qui est le suivant. Si l'isomorphisme entre $F(A)$ et $F(B)$ est unique, alors il n'y a qu'un seul isomorphisme entre A et B. En effet s'il existait deux isomorphismes distincts entre A et B, en les transpostant par F, on obtiendrait deux isomorphismes entre $F(A)$ et $F(B)$, ces deux-là étant bien distincts puisque F est fidèle.

Définition 1.2.2. Soit $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ un foncteur. On définit l'*image essentielle* de F comme la classe des objets de $\mathcal{C}_2$ isomorphe à $F(X)$ pour un certain X de $\mathcal{C}_1$. On dit que F est *essentiellement surjectif* si son image essentielle est constituée de tous les objets de $\mathcal{C}_2$.

Définition 1.2.3. Un foncteur à la fois pleinement fidèle et essentiellement surjectif est appelé une *équivalence de catégories*. Si le foncteur est contravariant, on préfère parler d'*anti-équivalence de catégories*.

Définition 1.2.4. Une anti-équivalence de catégories qui va de $\mathcal{C}$ dans elle-même est une *dualité* de $\mathcal{C}$.

1.3 Transformations naturelles

Un point important est que si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux catégories, les foncteurs de $\mathcal{C}_1$ dans $\mathcal{C}_2$ constituent également une catégorie. Bien sûr, les objets sont précisément ceux dont nous venons de parler, il ne reste donc plus qu'à définir les morphismes. Prenons donc F et G deux foncteurs de $\mathcal{C}_1$ dans $\mathcal{C}_2$. Un morphisme ψ de F dans G (ou encore *une transformation naturelle entre F et G*) est par défintion la donnée, d'une famille de morphisme $\psi_X : F(X) \to G(X)$ indexée par les objets de X[2] telle que pour tous objets A et B de $\mathcal{C}_1$ et toute flèche $f : A \to B$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\psi_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\psi_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

La composition de ces morphismes se définit de façon très naturelle. Si F, G et H sont trois foncteurs de $\mathcal{C}_1$ dans $\mathcal{C}_2$, ψ une transformation naturelle entre F et G et ψ' une transformation naturelle entre G et H, on définit $\psi' \circ \psi$ par la formule $(\psi' \circ \psi)_X = \psi'_X \circ \psi_X$ valable pour tout objet X de $\mathcal{C}_1$. On vérifie immédiatement que le diagramme qui doit commuter commute effectivement de sorte que $\psi' \circ \psi$ est bien un morphisme de foncteur.

1.4 Lemme de Yoneda

Nous allons nous intéresser plus particulièrement dans ce paragraphe à la catégorie $\hat{\mathcal{C}}$ des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ dans $\underline{\mathrm{Set}}$ (qui rappelons-le sont en fait les foncteurs de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ dans $\underline{\mathrm{Set}}$). Nous allons voir qu'en fait cette nouvelle catégorie est une extension naturelle de $\mathcal{C}$ dans laquelle les choses sont souvent plus faciles à voir et à écrire.

Pour cela, définissons un foncteur h de $\mathcal{C}$ vers $\hat{\mathcal{C}}$. Prenons donc X un objet de $\mathcal{C}$. On veut lui associer un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ dans $\underline{\mathrm{Set}}$. En fait, on choisit celui qui à Y associe l'ensemble $\mathrm{Hom}(Y, X)$, une flèche de Y_1 dans Y_2 donnant naturellement une application de $\mathrm{Hom}(Y_2, X)$ dans $\mathrm{Hom}(Y_1, X)$ simplement par composition.

Prenons maintenant $f : X_1 \to X_2$ et voyons comment on peut lui associer une transformation naturelle entre $h(X_1)$ et $h(X_2)$. Cela revient à définir pour tout objet Y de $\mathcal{C}$, une application de $\mathrm{Hom}(Y, X_1)$ dans $\mathrm{Hom}(Y, X_2)$. On prend alors la composition par f puis on vérifie qu'elle fait bien commuter le diagramme de la définition.

Théorème 1.4.1 (Lemme de Yoneda). Le foncteur h défini ci-dessus est pleinement fidèle.

Démonstration. La clé consiste à remarquer que si $f : X_1 \to X_2$ est une flèche de $\mathcal{C}$, on a l'égalité $f = (h(f))_{X_1}(\mathrm{id}_{X_1})$. Ceci prouve directement la fidélité.

Prenons maintenant X_1 et X_2 deux objets de $\mathcal{C}$ et considérons une transformation naturelle, disons ψ entre $h(X_1)$ et $h(X_2)$. Posons $f = \psi_{X_1}(\mathrm{id}_{X_1})$. Il s'agit de montrer que $h(f) = \psi$. Pour cela, considérons Y un objet de $\mathcal{C}$ et montrons que le morphisme $\psi_Y : \mathrm{Hom}(Y, X_1) \to \mathrm{Hom}(Y, X_2)$ n'est autre que la composition par f. Soit donc $g \in \mathrm{Hom}(Y, X_1)$. D'après la définition d'une transformation naturelle, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(X_1, X_1) \arrow[r, "\psi_{X_1}"] \arrow[d, "\cdot\circ g"'] & \mathrm{Hom}(X_1, X_2) \arrow[d, "\cdot\circ g"] \\ \mathrm{Hom}(Y, X_1) \arrow[r, "\psi_Y"'] & \mathrm{Hom}(Y, X_2) \end{tikzcd}$$

commute. On voit alors en envoyant par les deux chemins $\mathrm{id}_{X_1} \in \mathrm{Hom}(X_1, X_1)$ dans $\mathrm{Hom}(Y, X_2)$ que $\psi_Y(g) = f \circ g$, d'où le lemme de Yoneda. $\surd$

Il faut dire qu'en général (tout le temps ?) ce foncteur n'est pas essentiellement surjectif. Un objet de $\hat{\mathcal{C}}$, disons F se trouvant dans l'image essentielle de h est dit *représentable*. Un objet de $\mathcal{C}$ représentant F sera

[2]Il faut ici faire attention à certains problèmes de logique : les objets de X ne constituant pas a priori un ensemble, qu'est-ce qu'une famille de morphismes indexée par cela ? Et même si l'on arrive à en donner une définition, il n'y a aura raison pour que leur ensemble en soit effectivement un comme cela est imposé dans la définition d'une catégorie. Il existe des solutions pour palier à ce genre de problèmes mais elles n'entrent pas dans le cadre de ce papier et donc nous ne les exposerons pas ici.

alors objet de $\mathcal{C}$ dont l'image par h est isomorphe à F. D'après une remarque faite précédemment, un objet représentant F est unique à isomorphisme près.

Moralement, ce que l'on vient de faire est de plonger notre catégorie de départ $\mathcal{C}$ dans une autre, une sorte de complété. L'intêret de cela est qu'il est en général plus facile de définir les objets de $\hat{\mathcal{C}}$ que les objets de $\mathcal{C}$.

Pour donner un exemple simple, regardons le foncteur de $\hat{\mathcal{C}}$ qui à tout objet de $\mathcal{C}$ associe un ensemble possédant un et un unique élément, cela ne laissant pas trop le choix pour les morphismes. Bien, il est tautologique de voir que celui-ci est représentable si et seulement si $\mathcal{C}$ admet un objet final et que dans ce cas l'objet final de $\mathcal{C}$ représente notre foncteur. Mieux, le foncteur que l'on vient de définir n'a en fait pas d'autre automorphisme que l'identité (en effet, il n'y a qu'une flèche entre ensembles de cardinal 1) et donc toujours d'après la même remarque, l'objet final est ainsi unique à isomorphisme unique près.

En fait, cela s'applique assez systématiquement à tous les objets définis par propriété universelle. Voyons par exemple comment l'on peut procéder pour le produit de deux objets, disons A et B. Tout d'abord, il est utile de remarquer que si le produit de A par B existe, il vérifie par définition $\mathrm{Hom}\,(Y, A\times B) = \mathrm{Hom}\,(Y,A)\times\mathrm{Hom}\,(Y,B)$, et ce pour tout objet Y de $\mathcal{C}$. La première idée qui nous vient à l'esprit est alors de définir le foncteur $F : \hat{\mathcal{C}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ qui à un objet Y associe l'ensemble $\mathrm{Hom}\,(Y,A)\times\mathrm{Hom}\,(Y,B)$, et qui à une flèche de $f : Y_1 \to Y_2$ associe la flèche $F\,(f) : F\,(Y_1) \to F\,(Y_2)$ déduite simplement par composition par f. Comme on a tout fait pour, F est représentable si et seulement si le produit de A par B existe et un objet qui le représente est alors $A\times B$. Mais pour l'instant, cela n'est pas très satisfaisant car défini ainsi le produit n'hérite pas de projections canoniques et, plus grave, n'est pas unique à isomorphisme *unique* près. Mais en fait, la non-unicité qui nous manque correspond précisément aux automorphismes de $A\times B$, et lorsque l'on a un tel automorphisme, on peut regarder son image par F, la décomposer dans le produit $\mathrm{Hom}\,(A\times B, A)\times\mathrm{Hom}\,(A\times B, B)$ et obtenir ainsi les deux projections qui nous manquaient. En fait, la correspondance que l'on vient d'établir est bijective... et donc l'on a tout ce que l'on veut.

Donnons finalement un dernier exemple. Plaçons nous dans la catégorie opposée des groupes $\underline{\mathrm{Grp}}^{\mathrm{op}}$ et regardons le foncteur d'oubli $\underline{\mathrm{Grp}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ qui est bien un élément de $\widehat{\underline{\mathrm{Grp}}^{\mathrm{op}}}$. Celui-ci est en fait représentable par le groupe $\mathbb{Z}$. De même le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ représente le foncteur qui à un groupe G associe ses éléments de n-torsion, et à un morphisme associe sa restriction aux éléments de n-torsion.

1.5 Catégories linéaires

Fixons R un anneau commutatif, unitaire.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On dit que $\mathcal{C}$ est une catégorie A- *linéaire* si :

1. $\mathcal{C}$ admet un objet nul, disons $0_{\mathcal{C}}$
2. $\mathcal{C}$ admet des sommes et de produits finis
3. pour tous objets A et B de $\mathcal{C}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}\,(A,B)$ peut être muni d'une structure de R-module rendant la composition bilinéaire

Une catégorie $\mathbb{Z}$-linéaire s'appelle encore une catégorie *additive*.

Faisons quelques remarques. Tout d'abord notons que la première condition est impliquée par la seconde en remarquant qu'une somme indexée par l'ensemble vide fournit un objet initial et qu'un produit indexée par l'ensemble vide correspond à un objet final.

Un peu plus intéressant : on peut voir que si elle existe il y a une unique façon de mettre une structure de R-module sur $\mathrm{Hom}\,(A,B)$ rendant la composition bilinéaire. Ainsi une catégorie R-linéaire n'est pas une catégorie possédant une structure supplémentaire, il s'agit plutôt d'une catégorie vérifiant certains axiomes. En particulier, étant donné une catégorie R-linéaire $\mathcal{C}$ et deux objets A et B de $\mathcal{C}$, l'élément neutre de $\mathrm{Hom}\,(A,B)$ est bien défini : on l'appelle la *flèche nulle* de A dans B. Mais montrons plutôt ce que nous venons d'annoncer... Euh en fait, je ne sais pas faire.

Une troisième remarque est que les axiomes précédents permettent de prouver que si $X_1,\ldots,X_n$ sont des objets de $\mathcal{C}$, alors la somme directe $X_1\oplus\ldots\oplus X_n$ est en fait isomorphe au produit $X_1\times\ldots\times X_n$. On peut même imposer que cet isomorphisme, disons φ, vérifie pour tous i et j :

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "\delta_{ij}\mathrm{id}"'] & X_1\oplus\ldots\oplus X_n \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] & X_1\times\ldots\times X_n \arrow[r] & X_j \end{tikzcd}$$

devenant alors unique (δ désignant comme à l'habitude le symbole de Kronecker). La démonstration de ce fait que nous n'allons pas détailler ici passe par l'introduction de la notion de biproduit. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [?].

Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux catégories R-linéaires, un foncteur $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ sera dit *R-linéaire* si pour tous objets A et B de $\mathcal{C}_1$, l'application induite par F, $\mathrm{Hom}\,(A, B) \to \mathrm{Hom}\,(F\,(A)\,, F\,(B))$ est R-linéaire. Un foncteur $\mathbb{Z}$-linéaire est encore appelé un foncteur *additif*.

Il découle directement des axiomes de catégories linéaires que si A est un objet de $\mathcal{C}$, les foncteurs $\mathrm{Hom}\,(\cdot, A)$ et $\mathrm{Hom}\,(A, \cdot)$ sont R-linéaires.

1.6 Catégories abéliennes

Prenons $\mathcal{C}$ une catégorie additive.

Soient A et B deux objets de $\mathcal{C}$. Considérons $f : A \to B$. On dit que $(K, i : K \to A)$ est un *noyau* de f si chaque fois que l'on se donne un objet X et une flèche $g : X \to A$ tels que $f \circ g = 0$, g se factorise de façon unique selon le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & X \arrow[ul, dashed] \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Il y d'autre façon de voir cette définition. On peut par exemple considérer la catégorie dont les objets sont les couples (X, g) où $g : X \to A$ est tel que $g \circ f = 0$, un morphisme entre (X, g) et (Y, h) étant une flèche $\varphi : X \to Y$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "\varphi"'] & & \\ & A \arrow[r, "f"] & B \\ Y \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Un noyau de f peut alors être vu comme un objet final de cette catégorie. Ceci prouve directement l'unicité à isomorphisme unique près.

On peut également remarquer que si K est un noyau de f et si X est un objet quelconque de $\mathcal{C}$, on a $\mathrm{Hom}\,(X, K) = \ker\,(\mathrm{Hom}\,(X, A) \to \mathrm{Hom}\,(X, B))$, la flèche écrite étant la composition par f. Ainsi K peut finalement être vu comme un objet représentant le foncteur $\ker\,(\mathrm{Hom}\,(\cdot, A) \to \mathrm{Hom}\,(\cdot, B))$. Comme pour le produit, on ne recupère ni le morphisme $i : K \to A$, ni l'unicité à isomorphisme unique près mais il y a une bijection entre les automorphismes de K et l'ensemble des morphismes possibles de K dans A donc on retombe bien sur nos pieds.

Le lecteur pourra vérfier qu'avec les notation précédentes i est un monomorphismes, $f \circ i = 0$ et f est un monomorphisme si et seulement si K est l'objet nul de $\mathcal{C}$.

On introduit également la notion duale de celle-ci, à savoir celle de conoyau. Si A et B sont deux objets de $\mathcal{C}$ et $f : A \to B$ est un morphisme, on dit que $(C, \pi : B \to C)$ est un *conoyau* de f si chaque fois que l'on se donne un objet X et une flèche $g : B \to X$ tels que $g \circ f = 0$, g se factorise de façon unique selon le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[dl, dashed] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Le lecteur pourra vérfier qu'avec les notation précédentes π est un épimorphismes, $\pi \circ f = 0$ et f est un épimorphisme si et seulement si C est l'objet nul de $\mathcal{C}$.

On suppose à partir de maintenant que notre catégorie admet des noyaux et des conoyaux. On notera alors pour $f : A \to B$, $\ker f : \mathrm{Ker}\, f \to A$ le noyau de f (qui rappelons-le est unique à isomorphisme unique près) et

$\operatorname{coker} f : B \to \operatorname{Coker} f$ son conoyau. On définit alors l'*image* de f comme étant le noyau de $\operatorname{coker} f$ et la *coimage* de f comme le conoyau de $\ker f$. On notera $\operatorname{im} f : \operatorname{Im} f \to B$ l'image de f et $\operatorname{coim} f : A \to \operatorname{Coim} f$ la coimage de f.

On peut représenter tout cela sur le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\ker f"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\operatorname{coim} f"'] & B \arrow[r, "\operatorname{coker} f"] & \operatorname{Coker} f \\
& \operatorname{Coim} f & \operatorname{Im} f \arrow[u, "\operatorname{im} f"'] &
\end{tikzcd}$$

On remarque sur le diagramme précédent que $f \circ \ker f = 0$ et donc se factorise par le conoyau de $\ker f$, c'est-à-dire la coimage de f. On obtient ainsi une flèche $\varphi : \operatorname{Coim} f \to B$. On a également $\operatorname{coker} f \circ f = 0$, soit $\operatorname{coker} f \circ \varphi \circ \operatorname{coim} f = 0$. Mais $\operatorname{coim} f$ est un conoyau et donc un épimorphisme, on en déduit que $\operatorname{coker} f \circ \varphi = 0$ et puis que φ se factorise par le noyau de $\operatorname{coker} f$, c'est-à-dire par l'image de f, d'où finalement une flèche naturelle $\tilde{f} : \operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$. La situation est résumée par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\ker f"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\operatorname{coim} f"'] & B \arrow[r, "\operatorname{coker} f"] & \operatorname{Coker} f \\
& \operatorname{Coim} f \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"'] & \operatorname{Im} f \arrow[u, "\operatorname{im} f"'] &
\end{tikzcd}$$

Notons maintenant que toutes ces constructions sont fonctorielles dans le sens suivant. Si $f : A \to B$ et $f' : A' \to B'$ sont deux morphismes de notre catégorie, la donnée de $\varphi_A : A \to A'$ et de $\varphi_B : B \to B'$ tels que $\varphi_B \circ f = f' \circ \varphi_A$ va induire une flèche $\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} f'$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\ker f"] \arrow[d, dashed] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & B \arrow[d, "\varphi_B"] \\
\operatorname{Ker} f' \arrow[r, "\ker f'"] & A' \arrow[r, "f'"] & B'
\end{tikzcd}$$

En effet, la flèche $f \circ (\ker f)$ est nulle est donc $f' \circ \varphi_A \circ (\ker f) = \varphi_B \circ f \circ (\ker f) = 0$, ce qui prouve que $\varphi_A \circ (\ker f)$ se factorise par $\operatorname{Ker} f'$ et donne bien ce que l'on souhaite.

Une autre façon de voir ce résultat est de considérer la catégorie $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ dont les objets sont les triplets (A, B, f) où A et B sont deux objets de $\mathcal{C}$ et f sera une flèche de A dans B et où un morphisme $\varphi : (A, B, f) \to (A', B', f)$ sera deux flèches $\varphi_A : A \to A'$ et $\varphi_B : B \to B'$ telles que $\varphi_B \circ f = f' \circ \varphi_A$. La construction Ker est naturellement définie sur cette catégorie. Le résultat que nous venons d'annoncer dit précisément qu'il s'agit en fait d'un foncteur.

Bien entendu, on a exactement la même chose pour Coker, Im et Coim.

Définition 1.6.1. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite *abélienne* si :
- elle est additive
- elle admet des noyaux et des conoyaux
- pour toute flèche $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$, la flèche $\tilde{f} : \operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$ définie précédemment est un isomorphisme

L'exemple fondamental est bien entendu celui de la catégorie des R-modules. Plus généralement, si A est un anneau unitaire par nécessairement commutif la catégorie des A-modules à gauche disons est abélienne. Un théorème assez difficile donne même une sorte de réciproque : si $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne, alors il existe un anneau unitaire A tel que $\mathcal{C}$ soit équivalente à une sous-catégorie pleine de la catégorie des A-modules à gauche. L'intérêt de ce résultat est qu'il permet, lorsque l'on fait des calculs sur les catégories abéliennes, de voir notre catégorie de travail comme une telle sous-catégorie et donc de manipuler des éléments plutôt que des flèches, ce qui est parfois plus agréable.

Avec ces quelques axiomes, il est possible de définir par exemple les suites exactes, les quotients généralisant ainsi ce que l'on connaît dans la catégorie des R-modules. Nous allons voir dans un certain comment l'on fait cela mais avant tout donnant la propriété suivante très importante :

Propriété 1.6.2. Dans une catégorie abélienne, une flèche qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'une catégorie abélienne $\mathcal{C}$. Nous avons déjà vu que f est un monomorphisme si et seulement si son noyau est nul et qu'il est un épimorphisme si et seulement si son conoyau est nul. Ici donc, le noyau et le conoyau de f sont nuls, ce qui prouve que $\mathrm{Coim}\, f$ est en fait A tandis que $\mathrm{Im}\, f$ est B. Ainsi avec les notations précédentes les morphismes f et $\tilde{f}$ coïncident. Ceci démontre la propriété. $\surd$

1.7 Suites exactes et foncteurs exacts

Considérons à présent $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et prenons $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux morphismes de $\mathcal{C}$ tels que $g \circ f = 0$. On introduit alors le noyau de g, l'image et le coimage de f comme sur le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\mathrm{coim}\, f"'] & & B \arrow[rr, "g"] & & C \\
\mathrm{Coim}\, f \arrow[r, "\sim", "\tilde{f}"'] & \mathrm{Im}\, f \arrow[ur, "\mathrm{im}\, f"] \arrow[rr, dashed] & & \mathrm{Ker}\, g \arrow[ul, "\ker g"'] &
\end{tikzcd}$$

On a la décomposition $f = (\mathrm{im}\, f) \circ \tilde{f} \circ (\mathrm{coim}\, f)$ et donc $g \circ (\mathrm{im}\, f) \circ \tilde{f} \circ (\mathrm{coim}\, f) = 0$. Mais $\mathrm{coim}\, f$ est une flèche de conoyau, c'est donc un épimorphisme. Et d'autre part, par hypothèse, $\tilde{f}$ est un isomorphisme. On en déduit que $g \circ (\mathrm{im}\, f) = 0$ et puis que $\mathrm{im}\, f$ se factorise par le noyau de g et fournit ainsi une flèche $\mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Ker}\, g$. On dit que la suite $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ est *exacte* en B si cette flèche est un isomorphisme.

La suite $A_0 \to A_1 \to \ldots \to A_n$ est dite *exacte* si pour tout i entre 1 et $n-1$, la suite $A_{i-1} \to A_i \to A_{i+1}$ est exacte en A_i. Une suite exacte de la forme $0 \to A \to A'' \to A' \to 0$ est appelée une *suite exacte courte.*

Il est utile de savoir que si $f : A \to B$ est un morphisme quelconque de $\mathcal{C}$, on peut contruire facilement une suite exacte qui est :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\ker f"] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "\mathrm{coker}\, f"] & \mathrm{Coker}\, f \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Il est également utile de savoir qu'il est toujours possible de découper une suite exacte en plusieurs suites exactes courtes. Regardons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "f_{i-2}"] & A_{i-1} \arrow[rr, "f_{i-1}"] \arrow[dr, "\tilde{f}_{i-1}\circ(\mathrm{coim}\, f_{i-1})"'] & & A_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, Rightarrow, "\tilde{f}_i\circ(\mathrm{coim}\, f_i)"'] & & A_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] & \cdots \\
& & \mathrm{Im}\, f_{i-1} \sim \mathrm{Ker}\, f_i \arrow[ur, Rightarrow, "\ker f_i"] & & \mathrm{Im}\, f_i \sim \mathrm{Ker}\, f_{i+1} \arrow[ur, "\ker f_{i+1}"] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
& 0 \arrow[ur, Rightarrow] & & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Le lecteur pourra alors vérifier que si la longue suite écrite sur la première ligne est exacte, il en est de même des suites courtes représentés sur le diagramme par des doubles flèches.

Énonçons les résultats classiques sur les suites exactes qui généralisent ceux déjà connus sur les R-modules :

Lemme 1.7.1 (Lemme des cinq). On considère dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"'] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[d, "f_4"'] \\
B_0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes et tous les carrés commutent.

Dans cette situation, si f_0 est un épimorphisme et f_1 et f_3 sont des monomorphismes, on peut en déduire que f_2 est un monomorphisme. Pareillement si f_4 est un monomorphisme et f_3 et f_1 sont des épimorphismes, on peut en déduire que f_2 est un épimorphisme. En particulier, si f_0 est un épimorphisme, f_4 est un monomorphisme et f_1 et f_3 sont des isomorphismes, alors f_2 est lui aussi un isomorphisme.

Lemme 1.7.2 (Lemme du serpent). On considère dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f_1 \arrow[r] \arrow[d, "\ker f_1"] & \operatorname{Ker} f_2 \arrow[r] \arrow[d, "\ker f_2"] & \operatorname{Ker} f_3 \arrow[d, "\ker f_3"] \arrow[dddll, rounded corners] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\operatorname{coker} f_1"] & B_2 \arrow[r] \arrow[d, "\operatorname{coker} f_2"] & B_3 \arrow[r] \arrow[d, "\operatorname{coker} f_3"] & 0 \\
& \operatorname{Coker} f_1 \arrow[r] & \operatorname{Coker} f_2 \arrow[r] & \operatorname{Coker} f_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Étant donné les deux suites exactes $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ et $0 \to B_1 \to B_2 \to B_3$ et les morphismes f_1, f_2 et f_3, faisant commuter les carrés, on peut construire une longue suite (celle qui serpente) faisant commuter le diagramme. Cette suite est exacte.

Considérons maintenant deux catégories abéliennes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et un foncteur additif F de $\mathcal{C}_1$ dans $\mathcal{C}_2$.

On dira que F est *exact* si pour tout suite exacte $A_1 \to A_2 \to A_3$ dans $\mathcal{C}_1$, la suite qui s'en déduit par application du foncteur F à savoir $F(A_1) \to F(A_2) \to F(A_3)$ reste exacte dans $\mathcal{C}_2$.

On dira que F est *exact à gauche* si pour tout suite exacte $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3$ dans $\mathcal{C}_1$, la suite qui s'en déduit par application du foncteur F à savoir $0 \to F(A_1) \to F(A_2) \to F(A_3)$ reste exacte dans $\mathcal{C}_2$.

On dira que F est *exact à droite* si pour tout suite exacte $A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ dans $\mathcal{C}_1$, la suite qui s'en déduit par application du foncteur F à savoir $F(A_1) \to F(A_2) \to F(A_3) \to 0$ reste exacte dans $\mathcal{C}_2$.

On rappelle qu'un foncteur convariant F de $\mathcal{C}_1$ dans $\mathcal{C}_2$ est par convention considéré comme un foncteur de $\mathcal{C}_1^{\mathrm{op}}$ dans $\mathcal{C}^2$. Ainsi on dira que F est exact à gauche si pour tout suite exacte $A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ dans $\mathcal{C}_1$, la suite $0 \to F(A_3) \to F(A_2) \to F(A_1)$ est encore exacte et qu'il est exact à droite si pour tout suite exacte $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3$ dans $\mathcal{C}_1$, la suite $F(A_3) \to F(A_2) \to F(A_1) \to 0$ est encore exacte.

Proposition 1.7.3. Un foncteur est exact si et seulement si il est exact à gauche et à droite.

La preuve repose essentiellement sur le découpage d'une suite exactes longues en suites exactes courtes. Cependant les détails sont pénibles à écrire et *donc* laissés au lecteur :-)

Proposition 1.7.4. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et A un objet de $\mathcal{C}$. Les deux foncteurs $\operatorname{Hom}(A, \cdot)$ et $\operatorname{Hom}(\cdot, A)$ sont alors tous les deux exacts à gauche.

Démonstration. Commençons par examiner le foncteur $\operatorname{Hom}(A, \cdot)$. Considérons $0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3$ une suite exacte dans $\mathcal{C}$. Le fait que la suite soit exacte signifie en fait simplement que f_1 est un monomorphisme et que ce même f_1 est un noyau de f_2. Il s'agit de montrer que la suite $\operatorname{Hom}(A, X_1) \to \operatorname{Hom}(A, X_2) \to \operatorname{Hom}(A, X_3)$, où les flèches sont simplement les compositions par f_1 et f_2, est encore exacte. Prenons deux flèches $f, g : A \to X_1$ telles que $f_1 \circ f = f_1 \circ g$. Alors comme f_1 est un monomorphisme, on obtient $f = g$ et donc l'injectivité de l'application $\operatorname{Hom}(A, X_1) \to \operatorname{Hom}(A, X_2)$. Il est clair que la composée des deux applications est nulle, car il s'agit de la composition par $(f_1 \circ f_2) = 0$. Il ne reste plus qu'à prouver que si $f : X \to A_2$ est tel que $f_2 \circ f = 0$, alors f se factorise par A_1, mais ceci découle directement de la propriété universelle du noyau.

On peut faire une démonstration analogue pour le foncteur $\operatorname{Hom}(\cdot, A)$ mais il est sûrement plus astucieux de remarquer qu'on se ramène au cas précédent en considérant la catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ qui comme nous l'avons déjà vu est encore abélienne. $\surd$

2 Objets en R-modules

Fixons R un anneau commutatif, uniraire et $\mathcal{C}$ une catégorie admettant un objet final que l'on appelera F et des produits finis.

On rappelle alors que si A est un objet de $\mathcal{C}$, le produit $F \times A$ (resp. $A \times F$) est canoniquement isomorphe à A. Pour voir cela, il suffit de vérifier de vérifier que A vérifie les propriétés universelles définissant les produits considérés.

D'autre part considérons A, B, A' et B' quatre objets de $\mathcal{C}$ et deux morphismes $f : A \to A'$ et $g : B \to B'$. Ces deux derniers définissent des flèches $\tilde{f} : A \times B \to A \xrightarrow{f} A'$ et $\tilde{g} : A \times B \to B \xrightarrow{g} B'$ simplement par composition avec les projections canoniques. On en déduit alors une flèche produit $\tilde{f} \times \tilde{g} : A \times B \to A' \times B'$ que l'on notera plus simplement par la suite $f \times g$. On vérifie alors immédiatement que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
 & A' \times B \arrow[dr, "\mathrm{id}\times g"] & \\
A \times B \arrow[ur, "f\times\mathrm{id}"] \arrow[rr, "f\times g"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times g"'] & & A' \times B' \\
 & A \times B' \arrow[ur, "f\times\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

2.1 Définition

Un objet en R-module de $\mathcal{C}$ consiste en la donnée d'un objet de $\mathcal{C}$ que l'on va appeler G, d'un morphisme $p : G \times G \to G$ et pour tout $\lambda \in R$ d'un morphisme $[\lambda] : G \to G$, le tout vérifiant les axiomes de R-modules dits dans le langage des catégories.

Commençons par écrire l'axiome d'associativité. Il se traduit en fait tout naturellement par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "\mathrm{id}\times p"] \arrow[d, "p\times\mathrm{id}"'] & G \times G \arrow[d, "p"] \\
G \times G \arrow[r, "p"'] & G
\end{tikzcd}$$

La commutativité se traduit elle par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2\times\mathrm{pr}_1"'] & G \arrow[d, equal] \\
G \times G \arrow[r, "p"] & G
\end{tikzcd}$$

où pr_i désigne la i-ème projection canonique.

L'équivalent de l'élément neutre est en fait un morphisme $e : F \to G$ qui est tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & G \times F \arrow[d, "\mathrm{id}\times e"] \\
G & G \times G \arrow[l, "p"]
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & F \times G \arrow[d, "e\times\mathrm{id}"] \\
G & G \times G \arrow[l, "p"]
\end{tikzcd}$$

commutent. Un tel morphisme est appelé *neutre*.

Propriété 2.1.1. S'il existe, un tel morphisme est unique.

Démonstration. La démonstration de ceci est en fait une réécriture de la démonstration habituelle dans le cas classique. On se donne e et e' deux neutres et on cherche moralement à calculer $e.e'$. Ceci se traduit par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\sim"] & G \times F \arrow[dr, "\mathrm{id}\times e'"] & & \\
F \arrow[u, "e"] \arrow[ur, "e\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times e'"] \arrow[d, "e'"'] & & G \times G \arrow[r, "p"] & G \\
G \arrow[r, "\sim"'] & F \times G \arrow[ur, "e\times\mathrm{id}"'] & &
\end{tikzcd}$$

On remarque maintenant la grande flèche composée allant de F dans G. D'après les propriétés du neutre, elle vaut e si l'on suit le chemin du haut et e' si on suit celui du bas, d'où l'unicité. $\surd$

L'équivalent de l'existence d'un inverse à tout élément de G, sera l'existence d'un morphisme $\varphi : G \to G$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mathrm{id}\times\varphi"] \arrow[d] & G \times G \arrow[r, "p"] & G \\ F \arrow[urr, "e"'] & & \end{tikzcd}$$

où e bien entendu désigne le neutre. φ sera alors appelé l'*inverse* de G.

Propriété 2.1.2. S'il existe, un tel morphisme est unique.

Démonstration. Là encore, la démonstration est fortement inspirée de la preuve classique. L'idée est de calculer la quantité $x'xx''$ où x' et x'' sont deux inverses potentiels de x.

Faisons cela dans les règles de l'art. Notons φ et φ' deux tels morphismes. D'après les propriétés de notre morphisme, et en regardant composante par composante, il est facile de voir que l'application composée $G \xrightarrow{\varphi\times\mathrm{id}\times\varphi'} G \times G \times G \xrightarrow{\mathrm{id}\times p} G \times G \xrightarrow{p} G$ n'est autre que φ.

De même l'application $G \xrightarrow{\varphi\times\mathrm{id}\times\varphi'} G \times G \times G \xrightarrow{p\times\mathrm{id}} G \times G \xrightarrow{p} G$ s'identifie en fait à φ'.

On utilise alors l'associativité pour écrire le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & & G \times G \arrow[dr, "p"] & \\ G \arrow[r, "\varphi\times\mathrm{id}\times\varphi'"] & G \times G \times G \arrow[ur, "\mathrm{id}\times p"] \arrow[dr, "p\times\mathrm{id}"'] & & G \\ & & G \times G \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

commute et prouve ainsi que $\varphi = \varphi'$. $\surd$

Les axiomes pour l'action de l'anneau R s'écrivent ainsi :
- $[1_R] = \mathrm{id}_G$
- $p \circ ([\lambda] \times [\mu]) = [\lambda + \mu]$
- $[\lambda] \circ [\mu] = [\lambda\mu]$

Remarque 2.1.3. Dans le cas où $R = \mathbb{Z}$, un objet en R-module est aussi appelé un *objet en groupe commutatif.*

On peut aussi définir des morphismes entre ces objets de groupe. Effectivement, si $\mathcal{G}_1 = (G_1, p_1, [\lambda]_1)$ et $\mathcal{G}_2 = (G_2, p_2, [\lambda]_2)$ sont deux objets en R-module de la catégorie $\mathcal{C}$, une flèche de $\mathcal{G}_1$ dans $\mathcal{G}_2$ sera tout simplement la donnée d'une flèche $f : G_1 \to G_2$ dans la catégorie $\mathcal{C}$ faisant commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} G_1 \times G_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "f\times f"'] & G_1 \arrow[d, "f"] \\ G_2 \times G_2 \arrow[r, "p_2"] & G_2 \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{[\lambda]}"'] & G_2 \arrow[d, "{[\lambda]}"] \\ G_1 \arrow[r, "f"] & G_2 \end{tikzcd}$$

Si $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ est un tel morphisme, on notera $\tilde{f}$ le morphisme de $\mathcal{C}$ qui s'en déduit.

On a bien entendu un équivalent des propriétés classiques :

Propriété 2.1.4. Soit f un morphisme de $\mathcal{G}_1$ dans $\mathcal{G}_2$. Alors :

1. $e_2 = f \circ e_1$ où e_i désigne le neutre du groupe $\mathcal{G}_i$
2. f commute au morphisme d'inversion

Appelons $\mathcal{C}_R$ la catégorie que nous venons de définir.

Proposition 2.1.5. La catégorie $\mathcal{C}_R$ est R-linéaire.

Donnons une esquisse de démontration. Commençons par établir que $0 = F$ (avec les seuls morphismes possibles) est un objet final de $\mathcal{C}_R$. Pour cela, il suffit de voir que si $\mathcal{G} = (G, p, [\lambda])$ est un objet de $\mathcal{C}$, l'unique morphisme $G \to F$ est un morphisme de $\mathcal{C}_R$, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "p"] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ F \times F \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

mais cela est clair car il n'y a qu'une flèche arrivant dans F.

Montrons maintenant que ce même objet est aussi initial. Prenons donc un objet $\mathcal{G} = (G, p, [\lambda])$ de la catégorie $\mathcal{C}_R$ et $f : 0 \to \mathcal{G}$ un morphisme. On utilise la première assertion de 2.1.4 qui donne $f \circ e_0 = e_{\mathcal{G}}$ (avec des notations évidentes). Mais e_0 est une application de F dans F, c'est donc l'identité. Ainsi $f = e_{\mathcal{G}}$ et notre morphisme est bien unique. On vérifie immédiatement que e_{g} définit bien un morphisme de $\mathcal{C}_R$, ce qui prouve que 0 est bien un objet initial, puis un objet nul de $\mathcal{C}_R$.

Prenons $\mathcal{G}_1 = (G_1, p_1, [\lambda]_1)$ et $\mathcal{G}_2 = (G_2, p_2, [\lambda]_2)$ deux objets en R-module de $\mathcal{C}$. Considérons $\mathcal{G} = (G, p, [\lambda])$ où $G = G_1 \times G_2$, $p = p_1 \times p_2$ et $[\lambda] = [\lambda]_1 \times [\lambda]_2$. $\mathcal{G}$ est en fait un objet de $\mathcal{C}_R$ comme on le vérifie facilement en regardant les diagrammes un par un, le neutre (resp. l'inverse, resp l'action de R) s'obtenant en prenant le produit des neutres (resp. des inverses, resp des actions de R) respectives de $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$. On vérifie par les même occasion que les projection canoniques $G \to G_1$ et $G \to G_2$ sont des morphismes de R-modules. Donnons-nous maintenant un objet de $\mathcal{C}_R$ $\mathcal{X} = \big(X, \pi, [\lambda]'\big)$, une flèche $f_1 : \mathcal{X} \to \mathcal{G}_1$ et une flèche $f_2 : \mathcal{X} \to \mathcal{G}_2$. Cela définit alors une unique flèche $f = \tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2 : X \to G$. Pour montrer que $\mathcal{G}$ est un produit de $\mathcal{G}_1$ par $\mathcal{G}_2$, il suffit de prouver que f est R-linéaire, ce qui se vérifie sans difficulté.

Prouvons que ce même objet définit également une somme de $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ dans la catégorie $\mathcal{C}_R$. On se donne donc $\mathcal{X} = \big(X, \pi, [\lambda]'\big)$ et on veut comprendre l'ensemble $\mathrm{Hom}\,(\mathcal{G}, \mathcal{X})$. Prenons donc $f \in \mathrm{Hom}\,(\mathcal{G}, \mathcal{X})$. Il définit les deux applications suivantes :

$$\tilde{f}_1 :\ G_1 \xrightarrow{\sim} G_1 \times F \xrightarrow{\mathrm{id} \times e_1} G_1 \times G_2 \xrightarrow{\tilde{f}} X$$

$$\tilde{f}_2 :\ G_2 \xrightarrow{\sim} F \times G_2 \xrightarrow{e_2 \times \mathrm{id}} G_1 \times G_2 \xrightarrow{\tilde{f}} X$$

où e_i désigne le neutre du groupe $\mathcal{G}_i$. On vérifie que ces deux flèches sont des morphismes de R-modules. On obtient ainsi un élément de $\mathrm{Hom}\,(\mathcal{G}_1, \mathcal{X}) \times \mathrm{Hom}\,(\mathcal{G}_2, \mathcal{X})$. Réciproquement si $f_1 \in \mathrm{Hom}\,(\mathcal{G}_1, \mathcal{X})$ et $f_2 \in \mathrm{Hom}\,(\mathcal{G}_2, \mathcal{X})$, on introduit la flèche :

$$\tilde{f} :\ G_1 \times G_2 \xrightarrow{f_1 \times f_2} X \times X \xrightarrow{\pi} X$$

On prouve que la précédente flèche est R-linéaire et donc fournit un élément $f \in \mathrm{Hom}\,(\mathcal{G}, \mathcal{X})$. Il est alors facile de voir que les deux applications que l'on vient de définir sont bien inverses l'une de l'autre, ce qui prouve que $\mathcal{G}$ est bien une somme de $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ dans $\mathcal{C}_R$.

Défininissons la loi de groupe abélien sur les ensemble $\mathrm{Hom}\,(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$. Prenons donc $f, g : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ et remarquons que $G_1 \xrightarrow{f \times g} G_2 \times G_2 \xrightarrow{p_2} G_2$ (où p_2 est le produit de G_2) définit une application R-linéaire et donc un élément de $\mathrm{Hom}\,(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ que l'on définit comme étant $f + g$. Les axiomes définissant les objets en R-module se traduisent immédiatement pour prouver que la loi que l'on vient de définir fait de $\mathrm{Hom}\,(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ un groupe abélien.

L'action de R se définit de façon équivalente en remarquant que l'application composée $G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{[\lambda]} G_2$ est R-linéaire est permet donc de définir λf. La bilinéairité est simple et laissé au lecteur.

2.2 Le point de vue fonctoriel

On a vu que le lemme de Yoneda permet de voir les objets de $\mathcal{C}$ dans $\hat{\mathcal{C}}$. Il est en fait possible de faire une construction équivalente pour les objets de $\mathcal{C}_R$.

Plus précisément prenons $\mathcal{G} = (G, p, [\lambda])$ un objet de $\mathcal{C}_R$. Comme avec le lemme de Yoneda, à cet objet on veut associer un foncteur $h_{R,\mathcal{G}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \underline{\mathrm{Set}}$. Celui-ci va en fait être défini de la même façon : à un objet X de $\mathcal{C}$, il associe

$h_{R,\mathcal{G}}(X) = \mathrm{Hom}(X,G)$ et à une flèche $f : X_1 \to X_2$, il associe la flèche $h_{R,\mathcal{G}}(f) : \mathrm{Hom}(X_2,G) \to \mathrm{Hom}(X_1,G)$ qui n'est autre que la composition par f.

Il n'est pas anodin de noter que si X est un objet de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}(X,G)$ peut-être muni d'une structure de R-module. En effet, comme nous l'avons déjà plus ou moins fait, si $f, g : X \to G$ et $\lambda \in R$, on peut former le morphisme $f+g :\ X \xrightarrow{f\times g} G\times G \xrightarrow{p} G$ et le morphisme $\lambda f :\ X \xrightarrow{f} G \xrightarrow{[\lambda]} G$. Ainsi si $f : X_1 \to X_2$ est une flèche de $\mathcal{C}$, l'application $h(f)$ est en fait une application entre R-modules et il n'est pas bien difficile de voir qu'elle est R-linéaire. Autrement dit, notre foncteur $h_{R,\mathcal{G}}$ n'aboutit pas en fait dans $\underline{\mathrm{Set}}$ mais plutôt dans la catégorie des R-modules.

Remarquons encore que la construction que vous venons de faire est fonctiorielle dans le sens où si on a un morphisme $\varphi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ dans la catégorie $\mathcal{C}_R$, il induit une tranformation naturelle ψ entre $h_{R,\mathcal{G}_1}$ et $h_{R,\mathcal{G}_2}$. Pour la préciser, il nous faut prendre un objet X de $\mathcal{C}$ et construire un morphisme $\psi_X : h_{R,\mathcal{G}_1}(X) = \mathrm{Hom}(X,G_1) \to h_{R,\mathcal{G}_2}(X) = \mathrm{Hom}(X,G_2)$. Il suffit de prendre la composition par φ après avoir vérifié qu'elle est bien R-linéaire. Il est alors immédiat de vérifier que l'on a bien défini ainsi une transformation naturelle entre $h_{R,\mathcal{G}_1}$ et $h_{R,\mathcal{G}_2}$.

En résumé, nous venons de construire un foncteur h_R allant de $\mathcal{C}_R$ dans la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathrm{Mod}(R)$.

Théorème 2.2.1. Le foncteur h_R défini précédemment est pleinement fidèle.

Démonstration. La démonstration s'inspire de celle du lemme de Yoneda. La fidélité par exemple se montre exactement de la même façon en remarquant que si $f : \mathcal{G}_1 = (G_1, p_1, [\lambda]_1) \to \mathcal{G}_2 = (G_2, p_2, [\lambda]_2)$ est une flèche de $\mathcal{G}$, alors $\tilde{f} = (h_R(f))_{G_1}(\mathrm{id}_{G_1})$.

Prenons maintenant $\mathcal{G}_1 = (G_1, p_1, [\lambda]_1)$ et $\mathcal{G}_2 = (G_2, p_2, [\lambda]_2)$ deux objets de $\mathcal{C}_R$ et une transformation naturelle ψ entre $h_{R,\mathcal{G}_1}$ et $h_{R,\mathcal{G}_2}$. On pose alors $\tilde{f} = \psi_{G_1}(\mathrm{id}_{G_1})$ et on aimerait montrer que $\tilde{f}$ est un morphisme R-linéaire. On conclut alors exactement comme on l'a déjà dans la démonstration du lemme de Yoneda.

Pour montrer cela prenons un objet X de $\mathcal{C}$ quelconque. On remarque que par définition de la structure de R-module sur les $\mathrm{Hom}(X,G_i)$, le fait que la composition par f allant de $\mathrm{Hom}(X,G_1)$ dans $\mathrm{Hom}(X,G_2)$ soit R-linéaire se traduit par les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(X,G_1)\times\mathrm{Hom}(X,G_1) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(\tilde{f}\circ\cdot)\times(\tilde{f}\circ\cdot)"'] & \mathrm{Hom}(X,G_1\times G_1) \arrow[r, "p_1\circ\cdot"] \arrow[d, "(\tilde{f}\times\tilde{f})\circ\cdot"'] & \mathrm{Hom}(X,G_1) \arrow[d, "\tilde{f}\circ\cdot"] \\
\mathrm{Hom}(X,G_2)\times\mathrm{Hom}(X,G_2) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}(X,G_2\times G_2) \arrow[r, "p_2\circ\cdot"] & \mathrm{Hom}(X,G_2)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(X,G_1) \arrow[r, "{[\lambda]_1\circ\cdot}"] \arrow[d, "\tilde{f}\circ\cdot"'] & \mathrm{Hom}(X,G_2) \arrow[d, "\tilde{f}\circ\cdot"] \\
\mathrm{Hom}(X,G_2) \arrow[r, "{[\lambda]_2\circ\cdot}"] & \mathrm{Hom}(X,G_2)
\end{tikzcd}$$

En regardant la partie de droite du premier diagramme, en instanciant en $X = G_1 \times G_1$, et en envoyant par les deux chemins $\mathrm{id}_{G_1\times G_1}$, on obtient $\tilde{f}\circ p_1 = p_2 \circ (\tilde{f}\times\tilde{f})$. Le deuxième diagramme donne quant à lui, en instanciant en $X = G_1$ et en regardant comment s'envoie id_{G_1}, $\tilde{f}\circ[\lambda]_1 = [\lambda]_2\circ\tilde{f}$. $\surd$

La composition par le foncteur d'oubli permet de voir la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathrm{Mod}(R)$ comme une sous-catégorie de $\hat{\mathcal{C}}$. On dira qu'un tel foncteur est *représentable* s'il l'est, vu comme objet de $\hat{\mathcal{C}}$.

Théorème 2.2.2. L'image essentielle du foncteur h_R est exactement constitué des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathrm{Mod}(R)$ qui sont représentables.

Démonstration. Tout d'abord disons que si un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathrm{Mod}(R)$ est dans l'image essentielle de h_R, il est représentable. En effet, si notre foncteur est isomorphe à $h_R(\mathcal{G})$ où $\mathcal{G} = (G, p, [\lambda])$, un objet qui le représente est par exemple G.

Prenons maintenant un foncteur contravariant F de $\mathcal{C}$ dans $\mathrm{Mod}(R)$ et supposons-le représentable. Cela veut dire qu'il existe un objet G de $\mathcal{C}$ tel que F soit isomorphe à $h(G)$ (où h est le foncteur de Yoneda). Cela signifie que pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on a un isomorphisme $F(X) \to \mathrm{Hom}(X,G)$, ceux-ci étant compatibles avec les flèches de $\mathcal{C}$. Par transport de structure, on obtient une structure de R-module sur tous les $\mathrm{Hom}(X,G)$, et ce tel que si $f : X_1 \to X_2$ est une flèche de $\mathcal{C}$, l'application $\mathrm{Hom}\,(X_2, G) \to \mathrm{Hom}\,(X_1, G)$ déduite par composition par f soit R-linéaire.

Autrement dit, on a trouvé des transformations naturelles :

$$p : \mathrm{Hom}\,(\cdot, G) \times \mathrm{Hom}\,(\cdot, G) \sim \mathrm{Hom}\,(\cdot, G \times G) \to \mathrm{Hom}\,(\cdot, G)$$

$$[\lambda] : \mathrm{Hom}\,(\cdot, G) \to \mathrm{Hom}\,(\cdot, G)$$

Le lemme de Yoneda permet alors de les relever en des flèches $p : G \times G \to G$ et $[\lambda] : G \to G$. On vérifie alors que les axiomes faisant de $\mathrm{Hom}\,(X, G)$ un R-module se transposent directement et prouvent que $\mathcal{G} = (G, p, [\lambda])$ est un élément de $\mathcal{C}_R$. Finalement, l'image de $\mathcal{G}$ par h_R est bien isomorphe à F. $\surd$

Les deux résultats précédent prouve que la catégories $\mathcal{C}_R$ des objets de $\mathcal{C}$ en R-module est en fait équivalente à la catégorie des foncteurs représentables de $\mathcal{C}$ dans $\mathrm{Mod}\,(R)$, ce qui permet de donner une nouvelle description des objets en R-modules en les voyant comme des foncteurs.

D'autre part, on peut mettre sur la catégories des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathrm{Mod}\,(R)$ une structure R-linéaire. En effet considérons F et G deux tels foncteurs et ψ_1 et ψ_2 deux transformations naturelles entre eux. Prenons un objet X de $\mathcal{C}$. On a alors deux flèches $\psi_{1,X} : F\,(X) \to G\,(X)$ et $\psi_{2,X} : F\,(X) \to G\,(X)$ qui sont des applications R-linéaires entre R-modules. Appellons ψ_X la somme de ces deux applications. On vérifie immédiatement que cela définit un nouveau foncteur ψ, dont on dira qu'il est la somme de ψ_1 par ψ_2. On procède de même pour définir, pour $\lambda \in R$, le produit $\lambda\psi_1$. On vient de mettre ainsi une structure de R-module sur $\mathrm{Hom}\,(F, G)$ qui fait de la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathrm{Mod}\,(R)$ une catégorie R-linéaire. Avec ces définitions, le foncteur h_R devient R-linéaire.

2.3 Point de vue relatif

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie sur laquelle on ne fait pour l'instant aucune hypothèse. À partir de celle-ci, nous allons construire une nouvelle catégorie sur laquelle on aimerait appliquer la théorie que nous venons de présenter.

Considérons F un objet de $\mathcal{C}$ et définissons une nouvelle catégorie que nous allons noter $\mathcal{C}/F$. Ses objets vont être les couples (X, f) où X est un objet de $\mathcal{C}$ et f une flèche de X dans F. Un morphisme entre deux objets de $\mathcal{C}/F$, disons (A_1, f_1) et (A_2, f_2) sera une flèche $\varphi : A_1 \to A_2$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f_1"'] & & A_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

Il est alors facile de vérifier que $\mathcal{C}/F$ admet un objet final qui n'est autre que le couple (F, id_F).

On aimerait bien qu'elle admette des produits, voyons comment cela se traduit sur la catégorie $\mathcal{C}$. Prenons donc (A_1, f_1) et (A_2, f_2) deux objets de $\mathcal{C}/F$. Leur produit, s'il existe, sera constitué d'un objet (B, g) et de deux flèches $\mathrm{pr}_1 : (B, g) \to (A_1, f_1)$ et $\mathrm{pr}_2 : (B, g) \to (A_2, f_2)$, le tout tel que pour tout objet (X, h) de $\mathcal{C}/F$ et toutes flèches $\varphi_1 : (X, h) \to (A_1, f_1)$ et $\varphi_2 : (X, h) \to (A_2, f_2)$, il existe un unique morphisme $\varphi : (X, h) \to (B, g)$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} (X,h) \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_1"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi_2"'] & & \\ & (B,g) \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & (A_1, f_1) \\ & (A_2, f_2) & \end{tikzcd}$$

Mais ce diagramme se traduit immédiatement dans la catégorie $\mathcal{C}$. Plus précisément, dire que (A_1, f_1) et (A_2, f_2) admettent un produit dans la catégorie $\mathcal{C}/F$ revient à dire qu'il existe un objet B de $\mathcal{C}$ et deux morphismes $\mathrm{pr}_1 : B \to A_1$ et $\mathrm{pr}_2 : B \to A_2$ tels que pour tout objet X de $\mathcal{C}$ et toutes flèches $\varphi_1 : X \to A_1$ et $\varphi_2 : X \to A_2$, il existe une unique flèche $\varphi : X \to B$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_1"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi_2"'] & & \\
& B \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\
& A_2 \arrow[r, "f_2"'] & F
\end{tikzcd}
$$

Un tel objet muni des deux projections, s'il existe, est unique à isomorphisme unique près et s'appelle le *produit fibré* de A_1 par A_2 au dessus de F (ou encore le *pull-back* de f_1 par f_2). On le note en général $A_1 \times_F A_2$. Ainsi dire que $\mathcal{C}/F$ admet des produits équivaut à dire que $\mathcal{C}$ admet des produits fibrés au dessus de F.

On supposera par la suite que $\mathcal{C}$ admet des produits fibrés. Il est important de remarquer que cette hypothèse entraîne que la catégorie $\mathcal{C}_F$ admet elle aussi des produits fibrés. Pour voir cela, il suffit de se convaincre en faisant un petit dessin que si $\mathcal{F}' = (F', \varphi)$ est un objet de $\mathcal{C}/F$, alors $(\mathcal{C}/F)/\mathcal{F}'$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{C}/F'$.

Quoi qu'il en soit, la catégorie $\mathcal{C}/F$ vérifie les hypothèses que l'on avait faites dans les paragraphes précédents, on peut donc parler d'objet en R-module dans cette catégorie. Un tel objet sera appelé un *F-objet en R-module.*

Considérons maintenant deux objets F et F' de $\mathcal{C}$ et un morphisme $\varphi : F' \to F$. On a alors un foncteur $\iota_\varphi : \mathcal{C}/F' \to \mathcal{C}/F$. À un objet (X, f) de $\mathcal{C}/F'$, il associe l'objet $(X, \varphi \circ f)$ de $\mathcal{C}/F$ et ne touche pas aux morphismes. La dernière affirmation prouve sans hésitation que ι_φ est pleinement fidèle.

Prenons $\mathcal{G}_F$ un F-objet en R-module. On peut voir $\mathcal{G}_F$ comme un foncteur représentable de $\mathcal{C}/F$ dans $\mathrm{Mod}\,(R)$. En composant ce dernier par ι_φ, on obtient un foncteur de $\mathcal{C}/F'$ dans $\mathrm{Mod}\,(R)$. On aimerait avoir en fait un F'-objet en R-module. Pour cela, il faut voir que ce foncteur est représentable. On vérifie en fait simplement en jouant avec les définitions que l'objet de $\mathcal{C}/F'$, $X \times_F F' \to F'$ pull-back de f par φ le représente. Le F'-objet en R-module ainsi défini sera noté $\mathcal{G}_{F'}$.

La structure de R-module sur cet objet s'obtient de la façon suivante. Notons $p_F : G_F \times_F G_F \to G_F$ et $[\lambda]_F \,; G_F \to G_F$ les morphismes définissant la structure de $\mathcal{G}_F$. En faisant le pull-back de ces deux flèches par φ, on obtient deux nouvelles flèches $p_{F'} : (G_F \times_F G_F) \times_F F' \to G_F \times_F F'$ et $[\lambda]_{F'} : G_F \times_F F' \to G_F \times_F F'$. Ce sont celles-ci qui définissent la structure de R-module sur $\mathcal{G}_{F'}$, via l'isomorphisme $(G_F \times_F G_F) \times_F F' \sim (G_F \times_F F') \times_{F'} (G_F \times_F F')$.

2.4 Noyaux et conoyaux

On se place dans la situation et on reprend les notations du paragraphe précédent. On a vu que la catégorie des F-objets en R-module est R-linéaire, donc en particulier additive. On se demande à quelle condition elle est abélienne. Pour cela, voyons tout d'abord si elle admet des noyaux et des conoyaux.

On considère donc $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ deux F-objets en R-module et $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ un morphisme. On peut voir $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ comme des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}/F$ dans $\mathrm{Mod}\,(R)$, f devenant alors une transformation naturelle entre ces deux foncteurs. On considère alors le foncteur contravariant $\mathcal{K}$ de $\mathcal{C}/F$ dans $\mathrm{Mod}\,(R)$ défini par $\mathcal{K}\,(X) = \mathrm{Ker}\;(\mathcal{G}_1\,(X) \to \mathcal{G}_2\,(X))$, une flèche de X_1 dans X_2 induisant par fonctorialité une flèche de $\mathcal{K}\,(X_1)$ dans $\mathcal{K}\,(X_2)$. On considère également la transformation naturelle i entre $\mathcal{K}$ et $\mathcal{G}_1$ défini par $i_X = \ker\;(\mathcal{G}_1\,(X) \to \mathcal{G}_2\,(X))$ et on vérifie que le couple $(\mathcal{K}, i)$ est bien un noyau de f. Il ne reste plus qu'à voir à quelle condition $\mathcal{K}$ est représentable. En fait, il l'est toujours et l'objet qui le représente est le pull-back du neutre de $\mathcal{G}_2$, $e_2 : \mathcal{F} \to \mathcal{G}_2$ (où $\mathcal{F} = (F, \mathrm{id}_F)$ est l'objet final de $\mathcal{C}/F$) par f. La démonstration de ce fait repose sur de l'écriture de diagramme, n'apporte pas de difficulté particulière et est laissée au lecteur.

Bien entendu, on peut faire la même chose pour les conoyaux. On prend donc $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ un morphisme de F-objets en R-module. On construit le foncteur $\mathcal{C}$ en posant $mathcalC\,(X) = \mathrm{Coker}\;(\mathcal{G}_1\,(X) \to \mathcal{G}_2\,(X))$ où X est un F-objet et la transformation naturelle π entre $\mathcal{G}_2$ et $\mathcal{C}$ en posant $\pi_X = \mathrm{coker}\;(\mathcal{G}_1\,(X) \to \mathcal{G}_2\,(X))$. Comme précédemment, $\mathcal{C}$ vérifie la propriété universelle du conoyau, le problème est qu'en général, il n'est pas représentable... et donc on ne peut rien conclure. Le fait est qu'en général la catégorie des F-objet en R-module n'admet pas de conoyaux et n'est donc pas abélienne.

Comme nous allons le voir par la suite, il est quand même des cas où cette catégorie est abélienne. Toutefois, ce n'est pas en général un résultat facile à prouver et la situation n'est alors pas aussi idéale qu'on aurait pu l'imaginer. En effet, même si la catégorie des F-objets en R-module admet de conoyaux, le foncteur des conoyaux défini précédemment n'est en général toujours pas représentable. Autrement dit, le foncteur h_R qui permettait de voir les F-objets en R-module comme des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}/F$ dans $\mathrm{Mod}\,(R)$ n'envoie pas conoyau sur conoyau, bien qu'il soit pleinement fidèle.

3 Schémas

4 Schémas en R-modules et bigèbres

Soient R un anneau commutatif unitaire er S un schéma. On considère Sch la catégorie des schémas qui admet des produits fibrés et on adopte le point de vue relatif exposé précédemment. On considére ainsi la catégorie des S-schémas en R-module. En fait, on va se restreindre par la suite à la sous-catégorie pleine formée des schémas affines sur S. Nous avons déjà deux descriptions de cette catégorie. Le but de ce chapitre est d'en donner une troisième avec l'introduction des bigèbres (ou algèbres de Hopf).

4.1 Le cas affine

Dans ce paragraphe, nous allons supposer que le schéma de base S est affine. Ce sera donc le spectre d'un certain anneau A. Considérons $\mathcal{G} = (G, p, [\lambda])$ un S-schéma en R-module affine sur S. Comme S est affine, G l'est également. Ainsi on peut écrire $G = \mathrm{Spec}\ B$ pour un certain anneau B. La flèche de G dans S induit un morphisme d'anneau $A \to B$, faisant de B une A-algèbre.

Voyons maintenant quelles structures supplémentaires les morphismes p et $[\lambda]$ induisent sur B. $p : G \times_S G \to G$ va correspondre à un morphisme de A-algèbres $c : B \otimes_A B \to B$ alors que $[\lambda] : G \to G$ va fournir le morphisme de A-algèbres $[\lambda] : B \to B$. Les axiomes définissant la structure de R-algèbre sur $\mathcal{G}$ se traduisent sur les applications c et $[\lambda]$ que nous venons de définir par les diagrammes commutatifs suivants :

– Co-associativité :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "c"] \arrow[d, "c"'] & B \otimes_A B \arrow[d, "c\otimes\mathrm{id}"] \\ B \otimes_A B \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes c"'] & B \otimes_A B \otimes_A B \end{tikzcd}$$

– Co-commutativité :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "c"] \arrow[d, equal] & B \otimes_A B \arrow[d, "x\otimes y \mapsto y \otimes x"] \\ B \arrow[r, "c"] & B \otimes_A B \end{tikzcd}$$

– Existence d'un co-neutre. Ce sera un morphisme de A-algèbres $e : B \to A$ vérifiant :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "c"] \arrow[d, equal] & B \otimes_A B \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes e"] \\ B & B \otimes_A A \arrow[l, "\sim"'] \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "c"] \arrow[d, equal] & B \otimes_A B \arrow[d, "e\otimes\mathrm{id}"] \\ B & A \otimes_A B \arrow[l, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

Le morphisme e est forcément unique. Il s'appelle l'*augmentation*. Son noyau I s'appelle l'*idéal d'augmentation.*

– Existence d'un co-inverse. Ce sera un morphisme de A-algèbres $\varphi : B \to B$ vérifiant :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "c"] \arrow[drrr, "e"'] & B \otimes_A B \arrow[r, "\mathrm{id}\times\varphi"] & B \otimes_A B \arrow[r, "d"] & B \\ & & & A \arrow[u] \end{tikzcd}$$

(où d désigne la multiplication de B). Le morphisme φ est alors unique et est appelé l'*antipodie.*

– Co-action de R :

$$[1] = \mathrm{id}_B$$

$$[\lambda] \circ [\mu] = [\lambda\mu]$$

$$d \circ ([\lambda] \otimes [\mu]) \circ c = [\lambda + \mu]$$

où $d : B \otimes_A B \to B$ désigne la multiplication de B.

Une A-algèbre muni de ces structures supplémentaires s'appelle une *A, R-bigèbre*. Dans le cas où $R = \mathbb{Z}$, on dit simplement A-bigèbre ou A-algèbre de Hopf.

On définit bien entendu les morphismes de A, R-bigèbres comme les morphismes de A-algèbres qui commutent à c et à $[\lambda]$ pour tous les $\lambda \in R$.

La catégorie des S-schémas en R-module affines est alors équivalente à la catégorie des A, R-bigèbres. Mais une A, R-bigèbre n'est en fait qu'un A-objet en R-module dans la catégorie opposée des A-algèbres (les produits fibrés correspondent aux produits tensoriels d'algèbres). Et donc se donner un S-schéma en R-module affine revient en fait à se donner un foncteur *covariant* de la catégorie des A-algèbres dans la catégorie des R-modules. Autrement dit, on n'est pas obligé de définir notre foncteur sur tous les S-schémas, il suffit de le préciser sur ceux qui sont affines sur S.

Voyons comment se comportent ces bigèbres lors d'un changement de base. Prenons donc S' un S-schéma que l'on supposera ici affine. Cela revient exactement à se donner une A-algèbre A'. Prenons $\mathcal{G} = (G, p, [\lambda])$ un S-schéma en R-module. On a vu que le schéma qui s'en déduit sur S' par extension des scalaires est représenté par $G \times_S S'$ et que le produit (resp. l'action de R) sur ce S'-schéma se déduit simplement en faisant le pull-back de p (resp. $[\lambda]$) par le morphisme $S' \to S$ qui fait de S' un S-schéma. Ainsi la bigèbre correspond à $\mathcal{G}_{S'}$ est obtenu en considérant le produit tensoriel $G \otimes_A A'$, l'augmentation et l'action de R se déduisant de celle de G par tensorisation par le morphisme $A \to A'$ qui fait de A' une A-algèbre.

4.2 Le cas général

On ne suppose plus ici que S est affine. Prenons $\mathcal{G} = (G, p, [\lambda])$ un S-schéma en R-module affine sur S. En notant φ le morphisme $G \to S$ faisant de G un S-schéma, cela signifie que l'on peut recouvrir S par des ouverts affines $U_1, \ldots, U_n$, tel que pour tout i, $\varphi^{-1}(U_i)$ soit un ouvert affine de G.

Considérons un entier i. L'assertion précédente veut dire qu'en faisant le pull-back de φ par l'inclusion $\iota_i : U_i \to S$, on est dans la situation décrite dans le paragraphe précédent[3]. On a ainsi une A, R-bigèbre B_i et ce pour tout i. Essayons maintenant de les recoller.

Bien sûr l'objet que l'on va avoir à la fin ne sera pas une bigèbre. Ce sera en fait un faisceau de bigèbres. On se rappelle que pour construire un tel faisceau, il suffit de se donner les germes en tout point de S et vérifier quelques conditions de compatibilité. Prenons donc un point de S. Comme les U_i recouvrent S, notre point va être dans un certain des U_i et pourra donc être considéré comme un idéal premier $\mathfrak{p}$ de la A, R-bigèbre B_i. On regarde alors le localisé de B_i en la partie multiplicative $T = A \backslash \mathfrak{p}$, ce qui donne un A-module que l'on aimerait munir d'une structure d'algèbre puis de bigèbre. La multiplication de B_i induit une application $T^{-1}B_i \otimes_A T^{-1}B_i \to T^{-1}B_i$ tout simplement en associant $\frac{xx'}{tt'}$. à $(\frac{x}{t}, \frac{x'}{t'})$. La structure de bigèbre s'obtient en transportant la comultiplication de $B_i : B_i \to B_i \otimes_A B_i$. Cela fournit une application $T^{-1}B_i \to T^{-1}(B_i \otimes_A B_i)$ et donc ce que l'on cherche via l'isomorphisme $T^{-1}(B_i \otimes_A B_i) \sim T^{-1}B_i \otimes_A T^{-1}B_i$. On vérifie que ces lois munissent $T^{-1}B_i$ d'une structure de bigèbre. Pour l'action de R, on remarque que l'application $[\lambda]_{B_i} : B_i \to B_i$ fournit une application $T^{-1}B_i \to T^{-1}B_i$ vérifiant les bons axiomes. On constate finalement que la bigèbre obtenue ne dépend pas du choix de i. En effet, si i et j sont tels que U_i et U_j contienne le point de S choisi au départ, on applique la construction précédente à un ouvert affine inclus dans $U_i \cap U_j$, obtenant ainsi un isomorphisme entre les deux bigèbres que l'on aurait ainsi définies.

Comme précédemment, on a une équivalence de catégories entre les faisceaux de bigèbres sur S et les S-schémas en R-modules affines sur S.

[3]En effet, on a $G \times_S U_i = \varphi^{-1}(U_i)$ car se donner un morphisme vers G et un vers U_i donnant la même chose sur S revient à se donner un morphisme vers G qui composé par φ arrive dans U_i, et donc bien un morphisme qui arrive dans $\varphi^{-1}(U_i)$).

4.3 Exemples fondamentaux

Nous allons nous placer dans le cadre où le schéma de base S est affine, disons $S = \mathrm{Spec} A$. Bien entendu les mêmes exemples existent dans le cas général mais leur description demande de découper le schéma de base par des ouverts affines puis de procéder à des recollements, ce qui complique inutilement les choses.

Sauf indication contraire, nous supposerons également par la suite que $R = \mathbb{Z}$.

4.3.1 Le groupe additif $\mathbb{G}_a$

Le *groupe additif* $\mathbb{G}_a$ est défini comme étant le foncteur d'oubli de la catégorie des A-algèbres dans celle de groupes commutatifs.

Voyons tout d'abord que celui-ci est représentable. On cherche donc une A-algèbre B telle que pour tout A-algèbre C se donner un morphisme de A-algèbres de B dans C, revient à se donner un élément de C, et ce de façon fonctorielle dans un sens évident. On voit alors tout de suite que $B = A[X]$ convient, l'élément correspond au morphisme $\varphi : A[X] \to C$ étant bien entendu l'image de X.

Examinons la structure de bigèbre induite par $\mathbb{G}_a$ sur $A[X]$. Elle provient de la structure de groupe abélien sur les ensembles $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(A[X], C)$, cette dernière se traduisant par l'existence d'applications $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(A[X] \otimes_A A[X], C) \sim \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(A[X], C) \times \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(A[X], C) \to \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(A[X], C)$, faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(A[X] \otimes_A A[X], C) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \mathrm{Hom}(A[X], C) \arrow[d, "\sim"] \\ C \times C \arrow[r, "(x,y)\mapsto x+y"] & C \end{tikzcd}$$

Pour calculer la comultiplication, il faut instancier $C = A[X] \otimes_A A[X]$ et regarder ce que devient $\mathrm{id}_{A[X] \otimes_A A[X]}$. Son image dans $C \times C$ va être $(X \otimes 1, 1 \otimes X)$ qui va donner $X \otimes 1 + 1 \otimes X$ dans C. Finalement la comultiplication est l'unique morphisme de A-algèbres de $A[X]$ dans $A[X] \otimes_A A[X]$, qui à X associe $X \otimes 1 + 1 \otimes X$. Pour simplifier peut-être un peu, remarquons que $A[X] \otimes_A A[X]$ est canoniquement isomorphe à $A[X, Y]$, la comultiplication dans ce cas est l'unique morphisme de A-algèbres de $A[X]$ dans $A[X, Y]$ qui envoie X sur $X + Y$, c'est donc celui qui à un polynôme $P \in A[X]$ associe $P(X + Y)$.

De même on calcule l'augmentation. C'est l'unique morphisme de A-algèbres de $A[X]$ dans A qui à X associe 0. Autrement dit c'est celui qui à un polynôme $P \in A[X]$ associe $P(0)$. L'idéal d'augmentation (le noyau de ce morphisme) est donc l'idéal principal de $A[X]$ engendré par X. L'antipodie, quant à elle, est l'unique endomorphisme de A-algèbres de $A[X]$ envoyant X sur $-X$. C'est ainsi l'application qui à $P \in A[X]$ associe $P(-X)$.

Si maintenant R un anneau commutatif unitaire quelconque faisant de A une R-algèbre, le foncteur d'oubli que l'on a considéré dans ce paragraphe peut arriver dans la catégorie des R-modules. On obtient ainsi une strcture de R-module sur $\mathbb{G}_a$. Celle-ci se traduit par l'existence de endomorphismes de A-algèbres, $[\lambda]$ pour tout $\lambda \in R$. Plus précisément, $[\lambda]$ est le morphisme qui à un polynôme $P \in A[X]$ associe $P(\lambda X)$.

4.3.2 Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$

Soit ici le foncteur de la catégorie des A-algèbres dans celle des groupes commutatifs qui à une A-algèbre B associe le groupe de ses éléments inversibles. Un morphisme de A-algèbres envoyant forcément un inversible sur un inversible, on a bien défini un foncteur. C'est le *groupe multiplicatif* $\mathbb{G}_m$.

Une A-algèbre B qui représente ce foncteur doit être telle que se donner un morphisme de A-algèbre de B vers une A-algèbre quelconque C revient à se donner un élément inversible de C, ce qui revient encore à se donner deux éléments de C dont le produit fasse 1. Dit comme cela, on voit que $B = A[X, Y] / (XY - 1)$ convient. En général, on aime bien noter cette algèbre $A\left[X, \frac{1}{X}\right]$ et on aime bien voir ces éléments comme des polynômes faisant intervenir X et $\frac{1}{X}$.

Comme pour l'exemple précédent, on arrive à exhiber la structure de bigèbre sur $A\left[X, \frac{1}{X}\right]$.

La comultiplication est l'unique morphisme de A-algèbre de $A\left[X, \frac{1}{X}\right] \otimes_A A\left[X, \frac{1}{X}\right] \sim A\left[X, \frac{1}{X}, Y, \frac{1}{Y}\right]$ dans $A\left[X, \frac{1}{X}\right]$, qui envoie X sur $X \otimes X$, ou XY pour ceux qui préfèrent. C'est donc l'application qui à un polynôme $P \in A\left[X, \frac{1}{X}\right]$ associe $P(XY)$.

L'augmentation est le morphisme de A-algèbres de $A\left[X, \frac{1}{X}\right]$ dans A qui à un polynôme P associe $P(1)$. L'idéal d'augmentation est alors l'idéal principal de $A\left[X, \frac{1}{X}\right]$ engendré par $(X-1)$.

L'antipodie, quant à elle, est le endomorphisme de A-algèbres de $A\left[X, \frac{1}{X}\right]$, qui envoie X sur $\frac{1}{X}$, c'est-à-dire celui qui à un polynôme $P \in A\left[X, \frac{1}{X}\right]$ associe $P\left(\frac{1}{X}\right)$.

4.3.3 Les groupes diagonalisables

On peut généraliser la construction précédente. Considérons pour cela Γ un groupe commutatif de neutre e. On aimerait mettre une structure naturelle de bigèbre sur la A-algèbre $A[\Gamma]$, l'exemple précédent étant essentiellement le cas $\Gamma = \mathbb{Z}$. Rappelons peut-être la définition de $A[\Gamma]$. En tant que A-module, c'est le module libre dont une base est $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$. Pour définir la structure d'algèbre, il suffit de dire ce qu'est le produit de e_γ par $e_{\gamma'}$. Naturellement, on pose $e_\gamma e_{\gamma'} = e_{\gamma+\gamma'}$.

Un moyen de définir la structure de bigèbre recherchée est de regarder s'il n'existe pas une loi de groupe commutatif naturelle sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(A[\Gamma], B)$, où B est une A-algèbre fixée. Mais se donner un morphisme f de A-algèbres de $A[\Gamma]$ dans B revient à se donner pour tout $\gamma \in \Gamma$, un élément $x_\gamma \in B$ et ce tel que $x_e = 1$ et pour tous γ et γ', $x_\gamma x_{\gamma'} = x_{\gamma+\gamma'}$, la correspondance étant bien entendu $x_\gamma = f(e_\gamma)$. Autrement dit la donnée de f équivaut à la donnée d'un morphisme de groupes de Γ dans le groupe des inversibles de B. Mais ce dernier ensemble est naturellement muni d'une structure de groupe abélien et ainsi on construit ce que l'on désirait. Le S-schéma en groupe commutatif que l'on vient de définir correspond alors au foncteur qui à une A-algèbre B associe le groupe abélien $\mathrm{Hom}(\Gamma, B^\star)$ où $B^\star$ est le groupe des inversibles de B et qui à un morphisme de A-algèbre $\varphi : B \to B'$ associe la composition par φ restreint à $B^\star$ qui arrive bien dans $B'^\star$.

Voyons désormais de façon plus concrète quelle est la structure que l'on vient de définir. La comultiplication est le morphisme de A-algèbre de $A[\Gamma]$ dans $A[\Gamma] \otimes_A A[\Gamma]$ défini par $e_\gamma \mapsto e_\gamma \otimes e_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'augmentation est le morphisme de A-algèbres de $A[\Gamma]$ dans A qui envoie e_γ sur 1, et ce pour tout γ. L'antipodie est l'endomorphisme de A-algèbres de $A[\Gamma]$ qui envoie e_γ sur $e_{-\gamma}$.

Notons $D(\Gamma)$ le S-schéma en groupe commutatif que nous venons de construire. Il est intéressant de remarquer que D est en fait un foncteur contravariant de la catégorie des groupes abéliens dans celle des S-schémas en groupes commutatifs. En effet si Γ et Γ' sont deux groupes abéliens un morphisme de groupes $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$ induit pour toute A-algèbre B, un morphisme de groupe $\varphi_B : \mathrm{Hom}(\Gamma', B^\star) \to \mathrm{Hom}(\Gamma, B^\star)$ qui est la composition par φ. La famille des (φ_B) est, comme on le vérifie immédiatement, une transformation naturelle (ie une flèche) entre $D(\Gamma)$ et $D(\Gamma')$ vus comme foncteurs. Remarquons tout de suite que le foncteur D est additif.

Proposition 4.3.1. Le foncteur D ainsi défini est pleinement fidèle (j'espère).

Démonstration. Commençons par prouver la fidélité. Considérons Γ et Γ' deux groupes abéliens et $f, g : \Gamma \to \Gamma'$ deux morphismes de groupes. Supposons qu'ils induisent par D la même transformation naturelle entre les S-schémas en groupe commutatif $D(\Gamma)$ et $D(\Gamma)'$. Cela veut dire que quelque soit la A-algèbre B et le morphisme de groupes $\varphi : \Gamma' \to B^\star$, on a $\varphi \circ f = \varphi \circ g$. Pour conclure que $f = g$, il suffit donc de trouver un φ injectif. Prenons $B = A[\Gamma]$ et φ défini $\varphi(\gamma) = e_\gamma$ pour $\gamma \in \Gamma$ qui conviennent.

Hmmm... je sais pas faire pour plein. Est-ce vrai d'ailleurs ? $\surd$

Un S-schéma en groupe commutatif qui est dans l'image essentielle du foncteur D est dit *diagonalisable*. D'après la proposition précédente, si $\mathcal{G}$ est un S-schéma en groupe commutatif diagonalisable, il existe à isomorphisme près un unique groupe abélien Γ tel que $D(\Gamma)$ soit isomorphe à $\mathcal{G}$. On dit alors que $\mathcal{G}$ est *diagonalisé* par Γ ou encore que Γ *diagonalise* G.

Une autre propriété intéressante du foncteur D est qu'elle transforme conoyau en noyau. En effet, prenons $\Gamma_1 \to \Gamma_2 \to \Gamma_3 \to 0$ une suite exacte de groupes abéliens. Si B est une A-algèbre, on a vu que le foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot, B^\star)$ est exact à gauche et donc on obtient la suite exacte $\mathrm{Hom}(\Gamma_3, B^\star) \to \mathrm{Hom}(\Gamma_2, B^\star) \to \mathrm{Hom}(\Gamma_1, B^\star) \to 0$, ce qui prouve bien le fait annoncé.

4.3.4 Le schéma en groupe μ_n

Un cas particulier intéressant de groupe diagonalisable est $\mu_n = D(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. C'est ce que l'on appelle le *S-schéma en groupe des racines n-ième de l'unité.*

Le foncteur associé à ce S-schéma est par définition celui qui à une A-algèbre B associe le groupe abélien $\mathrm{Hom}\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B^{\star}\right)$ mais ce dernier s'identifie canoniquement au sous-groupe des éléments de n-torsion de $B^{\star}$, ce qui donne une description un peu plus simple.

Il est facile de voir que la bigèbre de ce S-schéma en groupe commutatif est $A\left[X\right]/\left(X^n-1\right)$, la comultiplication étant l'unique morphisme de A-algèbre $c : A\left[X\right]/\left(X^n-1\right) \to A\left[X\right]/\left(X^n-1\right) \otimes_A A\left[X\right]/\left(X^n-1\right)$ envoyant X sur $X \otimes X$. L'augmentation est le morphisme de A-algèbre $A\left[X\right]/\left(X^n-1\right) \to A$ qui envoie X sur 1. L'antipodie est l'endomorphisme de A-algèbre de $A\left[X\right]/\left(X^n-1\right)$ qui envoie X sur $X^{-1} = X^{n-1}$.

Il est intéressant que remarquer que si Γ est un groupe commutatif finiment engendré, alors il va s'écrire sous la forme $\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \oplus \ldots \mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}$. On a même unicité si l'on impose en outre les conditions $n_i \geqslant 2$ pour tout i et $n_1|n_2|\ldots|n_s$. Enfin bon. Cela permet en tout cas de prouver que $D\left(\Gamma\right)$ va s'écrire comme le produit $\mathbb{G}_m^r \times_S \mu_{n_1} \times_S \ldots \times_S \mu_{n_s}$. En particulier, on obtient ainsi une description explicite des sous-S-schémas en groupe commutatif de $\mathbb{G}_m^r$.

Remarquons finalement que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est en fait le conoyau de l'endomorphisme de $\mathbb{Z}$, multiplication par n. Ceci prouve d'après une remarque précédente que μ_n est le noyau de $n : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ (où n désigne bien entendu la multiplication par n).

4.3.5 Les groupes constants

Soit Γ un groupe commutatif. On aimerait considérer le foncteur qui associe à n'importe quelle A-algèbre B le groupe Γ. Le problème est que ce foncteur n'est pas représentable, il ne s'agit donc pas d'un S-schéma en groupe commutatif. Toutefois, on a le lemme suivant qui va quand même permettre de poser une définition satisfaisante :

Lemme 4.3.2. Gardons les notations précédentes et supposons en outre que A est un anneau connexe[4] de caractéristique différente de 2. Soient B une A-algèbre connexe également et E un ensemble quelconque. On munit alors l'ensemble des fonctions de E dans B, noté A^E d'une structure de A-algèbre. Les morphismes de A-algèbres de A^E dans B sont alors exactement ceux de la forme $\varphi \mapsto \varphi\left(x\right)$ pour un certain $x \in E$. Autrement dit, on a une bijection canonique entre l'ensemble $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}\left(A^E, B\right)$ et l'ensemble E.

Démonstration. Soit $\varphi : A^E \to B$ un morphisme de A-algèbres. Pour tout $x \in E$, appelons e_x la fonction caractéristique de x vue comme élément de A^E. e_x est un idempotent de A^E et donc son image $\varphi\left(e_x\right)$ est idempotente d'où, par connexité de B, soit égale à 0, soit égale à 1.

Il faut maintenant prouver qu'il existe un et un unique $x \in E$ tel que $\varphi\left(e_x\right) = 1$. L'existence provient du fait que si tous les $\varphi\left(e_x\right)$ étaient nuls, le morphisme φ serait lui-même nul, ce qui n'est pas possible puisqu'il doit envoyer l'unité de A^E sur 1. Supposons maintenant qu'il existe x et y dans E tels que $\varphi\left(e_x\right) = \varphi\left(e_y\right) = 1$. La fonction $e_x + e_y$ est également idempotente mais d'après ce que précède son image est 2, ce qui est contradictoire car l'on a pris soin de supposer que la caractéristique de A et donc de B était différente de 2. $\surd$

Que se passe-t-il maintenant si $E = \Gamma$ n'est plus un ensemble quelconque mais plutôt un groupe abélien ? L'isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}\left(A^\Gamma, B\right) \to \Gamma$ va induire une structure de groupe abélien sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}\left(A^\Gamma, B\right)$. Essayons de la décrire. Pour cela, notons pour $\gamma \in \Gamma$, φ_γ la fonction qui associe 1 à e_γ et 0 à $e_{\gamma'}$ pour $\gamma' \neq \gamma$. On a alors la relation $\varphi_\gamma \varphi_{\gamma'} = \varphi_{\gamma+\gamma'}$. On peut présenter ce résultat de façon un peu plus intrinsèque en disant que si f et g sont des éléments de $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}\left(A^E, B\right)$, le produit $f \star g$ est défini par la formule :

$$\left(f \star g\right)\left(e_\gamma\right) = \sum_{\gamma'+\gamma''=\gamma} f\left(e_{\gamma'}\right) g\left(e_{\gamma''}\right)$$

valable pour tout $\gamma \in \Gamma$.

L'intêret de cette dernière formule est qu'elle garde un sens pour A et B non nécessairement connexes si l'on prend soin de supposer que Γ est fini. On vérifie simplement que $\left(f \star g\right)\left(e_\gamma\right)\left(f \star g\right)\left(e_{\gamma'}\right) = \left(f \star g\right)\left(e_\gamma e_{\gamma'}\right)$, ce qui prouve que $f \star g$ est bien un morphisme de A-algèbres, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}\left(A^E, B\right)$

Mieux, notre formule définit encore dans ce cas une structure de groupe abélien sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}\left(A^E, B\right)$.

En effet, il est facile de vérifier que le neutre $\underline{e}$ n'est autre que la fonction qui associe 1 à e_0 (où 0 est le neutre de Γ) et 0 à e_γ pour tout $\gamma \neq 0$.

[4] On rappelle que ceci signifie que $\mathrm{Spec} A$ est connexe, ce qui se lit sur A en voyant que ses seuls idempotents, c'est-à-dire les seuls $x \in A$ tels que $x^2 = x$, sont 0 et 1.

Si maintenant $f \in \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}\left(A^E, B\right)$, vérifions que la morphisme de A-modules g défini par $g\left(e_\gamma\right) = f\left(e_{-\gamma}\right)$ pour $\gamma \in \Gamma$ est un morphisme de A-algèbres et qu'il vérifie $f \star g = \underline{e}$. La première vérification est simple. En effet $g\left(e_\gamma\right) g\left(e_{\gamma'}\right) = f\left(e_{-\gamma}\right) f\left(e_{-\gamma'}\right) = \delta_{-\gamma,-\gamma'} = \delta_{\gamma,\gamma'}$. Pour la seconde, faisons le calcul :

$$(f \star g)\left(e_\gamma\right) = \sum_{\gamma'+\gamma''=\gamma} f\left(e_{\gamma'}\right) g\left(e_{\gamma''}\right) = \sum_{\gamma'+\gamma''=\gamma} f\left(e_{\gamma'}\right) f\left(e_{-\gamma''}\right) = \sum_{\gamma'+\gamma''=\gamma} f\left(e_{\gamma'} e_{-\gamma''}\right)$$

Si $\gamma \neq 0$, on aura toujours dans les termes de le somme $\gamma' \neq -\gamma''$ et donc $e_{\gamma'} e_{-\gamma''} = 0$, d'où finalement $(f \star g)\left(e_\gamma\right) = 0$. Si maintenant $\gamma = 0$, on va avoir $\gamma' = -\gamma''$ et donc $e_{\gamma'} e_{-\gamma''} = e_{\gamma'}$. Ainsi :

$$(f \star g)\left(e_0\right) = \sum_{\gamma' \in \Gamma} f\left(e'_\gamma\right) = f\left(\sum_{\gamma' \in \Gamma} e_{\gamma'}\right)$$

Mais l'élément $\sum_{\gamma' \in \Gamma} e_{\gamma'}$ est le neutre de la A-algèbre A^Γ et donc son image par f est 1. Tout cela prouve bien que $f \star g = \underline{e}$.

On peut ainsi définir, pour Γ un groupe commutatif fini fixé le S-schéma en groupe commutatif, $C(\Gamma)$ qui est le foncteur qui à une A-algèbre B associe l'ensemble $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}\left(A^\Gamma, B\right)$ muni de la structure de groupe abélien que l'on vient de décrire, l'action de $C(\Gamma)$ sur un morphisme de A-algèbres $\varphi : B_1 \to B_2$ étant bien entendu la composition par φ. Le lecteur pourra vérifier que l'application $\varphi \mapsto C(\Gamma)(\varphi)$ ainsi définie est bien un morphisme de groupes.

La bigèbre associée à ce S-schéma en groupes a bien évidemment pour A-algèbre sous-jacente la A-algèbre A^Γ. La comultiplication c est donnée par :

$$c\left(e_\gamma\right) = \sum_{\gamma'+\gamma''=\gamma} e_{\gamma'} \otimes e_{\gamma''}$$

L'augmentation est le morphisme de A-algèbres de A^Γ dans A qui est l'évaluation en 0. L'idéal d'augmentation est donc l'ensemble des applications de Γ dans A qui s'annulent en 0. L'antipodie est l'endomorphisme de A-algèbres de A^Γ qui envoie e_γ sur $e_{-\gamma}$.

Il est ici également intéressant de remarquer que C est en fait un foncteur de la catégorie des groupes commutatifs finis dans la catégorie des S-schémas en groupe commutatif. En effet prenons Γ et Γ' deux groupes commutatifs finis et une flèche $f : \Gamma \to \Gamma'$. Elle induit directement un morphisme de A-algèbres de $A^{\Gamma'}$ dans A^Γ, celui-ci fournissant une transformation naturelle entre $C(\Gamma)$ et $C(\Gamma')$ simplement par composition.

Proposition 4.3.3. Le foncteur C est additif et pleinement fidèle (j'espère).

Démonstration. L'addivité se vérifie sans difficulté.

Montrons que C est fidèle. Prenons donc Γ et Γ' deux groupes commutatifs finis et $f, g : \Gamma \to \Gamma'$ deux morphismes de groupes tels que $C(f) = C(g)$. Comme on a déjà vu que le foncteur Hom est fidèle, on en déduit que f et g induisent la même flèche $A^{\Gamma'} \to A^\Gamma$. Prenons maintenant $\gamma' \in \Gamma'$ et considérons la fonction caractéristique de γ' à valeurs dans A, disons $\xi_{\gamma'}$. On a alors $\xi_{\gamma'} \circ f = \xi_{\gamma'} \circ g$, c'est-à-dire $f(\gamma) = \gamma'$ si et seulement si $g(\gamma) = \gamma'$ et ce pour tout γ'. Ceci prouve bien que $f = g$, et la fidélité de C.

Hmmm... pour plein, je ne sais pas faire. $\surd$

4.3.6 Les R-modules constants

Dans ce dernier paragraphe, on se suppose plus $R = \mathbb{Z}$. On considère ce coup-ci Γ un R-module qui est un ensemble fini. Comme précédemment dans le cas où A et B et la caractéristique de A est différente de 2, $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}\left(A^G, B\right)$ s'identifie canoniquement à Γ en tant qu'ensembles. On veut alors voir comment se transporte la structure de R-module sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}\left(A^\Gamma, B\right)$ et écrire des formules qui ont une chance de marcher dans le cas général. On trouve, en gardant les notations précédentes, pour $f \in \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}\left(A^\Gamma, B\right)$ et $\lambda \in R$, $(\lambda \cdot f)\left(e_\gamma\right) = f\left(e_{\lambda\gamma'}\right)$

Il reste à quelles conditions sur R, cela définit une structure de R-module sur $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}\left(A^\Gamma, B\right)$ dans le cas général. Calculons donc :

$$[\lambda \cdot (f \star g)] = \sum_{\gamma'+\gamma''=\lambda\gamma} f\left(e_{\gamma'}\right) g\left(e_{\gamma''}\right)$$

et

$$(\lambda \cdot f \star \lambda \cdot g) = \sum_{\gamma' + \gamma'' = \gamma} (e_{\lambda\gamma'})\, g\, (e_{\lambda\gamma''})$$

On voit facilement qu'une condition suffisante pour que ces deux expressions coïncident est que λ est inversible dans R. En particulier, si R est un corps, ce que nous allons supposer par la suite, l'action que l'on vient de définir fait bien de $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}\left(A^{\Gamma}, B\right)$ un R-espace vectoriel. (On remarquera que si R est un corps, il s'injecte dans le R-espce vectoriel Γ. Comme Γ est supposé fini, on en déduit que R l'est également).

Décrivons maintenant la structure de A, R-bigèbre que l'on obtient sur A^{Γ}. Bien entendu, la comultiplication, l'augmentation et l'antipodie sont les mêmes que celles décrites dans le paragraphe précédent. Pour $\lambda \in R$, le morphisme $[\lambda]$ est défini par $[\lambda]\,(e_{\gamma}) = e_{\lambda\gamma}$.

Comme précédemment, on constate que l'on a ainsi défini un foncteur de la catégorie des R-espaces vectoriels de dimension finie dans la catégorie des S-schémas en R-module. Ce foncteur est additif et fidèle.

5 Schémas en R-modules finis et plats

Dans ce chapitre, on considère un schéma S localement nœthérien.

5.1 Définition

Soit X un S-schéma. On dit que X est *fini* (resp. *plat*, resp. *localement libre*) sur S, s'il existe un recouvrement de S par des ouverts affines (U_i) tel que pour tout i, le schéma $U_i \times_S X$ soit affine et si on note $U_i = \mathrm{Spec}\,(A_i)$ et $U_i \times_S X = \mathrm{Spec} B_i$, la A_i-algèbre B_i soit finie (resp. plate, resp. finie).

Proposition 5.1.1. Soient A un anneau nœthérien et B une A-algèbre finie. Les quatre propriétés suivantes sont alors équivalentes :

1. B est une A-algèbre plate (ie le foncteur $\cdot \otimes_A B$ est exact à droite)
2. B est un A-module projectif
3. pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $S^{-1}B$ est un $S^{-1}A$-module libre (où $S = A \backslash \mathfrak{p}$)
4. le schéma $\mathrm{Spec} B$ est localement libre sur $\mathrm{Spec} A$

Démonstration. Sais pas faire, mais c'est dans Bourbaki. $\surd$

On voit tout de suite que dire que X est fini et plat sur S équivaut en fait à dire que X est localement libre de rang fini sur S. Le rang est alors une fonction localement constante sur S et comme on a supposé S connexe, celui-ci est bien défini. On le note $[X, S]$.

Un S-schéma en R-module $\mathcal{G}$ est dit *fini* (resp. *plat*) si son S-schéma sous-jacent G est fini (resp. plat) sur S. Bien entendu, cette propriété se traduit directement sur les bigèbres. Plus précisément, si l'on note B la bigèbre de $\mathcal{G}$, dire que $\mathcal{G}$ est fini (resp. plat) revient à dire que B est finie (resp. plate) en tant que A-algèbre.

On voit facilement par cette caractérisation qui ni le groupe additif, ni le groupe multiplicatif, ni $D\,(\Gamma)$ si Γ est infini n'est un S-schéma en groupe commutatif fini. Par contre, si Γ est un groupe abélien fini, les bigèbres associés à $D\,(\Gamma)$ et à $C\,(\Gamma)$ sont des A-algèbres libres de rang fini sur A en tant que A-modules et donc les groupes diagonalisables et les groupes constants sont des S-schéma en groupe commutatif finis et plats.

5.2 Dualité de Cartier

5.2.1 Avec des bigèbres

Si A est un anneau, on connait une dualité sur la catégorie des A-modules libres de rang fini. Le foncteur ^{t} qui la réalise n'est autre que $\mathrm{Hom}\,(\cdot, A)$. Rappelons brièvement pourquoi il s'agit d'une dualité. Tout d'abord si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de B sur A, on considère les $x_i^{\star}$ définis par $x_i^{\star}\,(x_j) = \delta_{ij}$ (où δ est le symbôle de Kronecker) et on montre sans mal que $(x_i^{\star})$ est une base de ${}^tB$. Ainsi ${}^tB$ est un A-module libre de même rang que B. On vérifie ensuite que l'application $B \to {}^t({}^tB)$, $x \mapsto (\varphi \mapsto \varphi\,(x))$ est un isomorphisme et induit une transformation naturelle entre ${}^t \circ {}^t$ et l'identité, ce qui permet de conclure.

L'idée est alors d'utiliser cette dualité pour en construire une sur la catégorie des S-schémas en R-modules finis et plats. Mais commençons par le faire sur la catégorie des A, R-bigèbres libres de rang fini en tant que A-modules (où A désigne un anneau commutatif unitaire). Prenons donc B une telle A, R-bigèbre. On peut bien entendu la considérer comme un A-module libre de rang fini et donc introduire l'objet ${}^tB$ qui n'est pour l'instant qu'un A-module libre de rang fini.

Il est nécessaire de voir avant d'aller plus loin que ${}^tB \otimes_A {}^tB$ est canoniquement isomorphe à ${}^t(B \otimes_A B)$, l'isomorphisme étant l'application $\varphi \otimes \psi \mapsto (x \otimes y \mapsto \varphi(x)\,\psi(y))$. On vérifie immédiatement que cette application est bien définie. Pour voir qu'il s'agit d'un isomorphisme, notons $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de B comme A-module. La famille $(x_i^\star)$ est alors une base de ${}^tB$, et une base de ${}^tB \otimes_A {}^tB$ est donnée par la famille des $\left(x_i^\star \otimes x_j^\star\right)$. Il suffit alors que vérifier que le morphisme que l'on vient de définir envoie $x_i^\star \otimes x_j^\star$ sur $(x_i \otimes x_j)^\star$, ce qui est immédiat.

On déduit de cela que la comultiplication de B, $c : B \to B \otimes_A B$ induit une application A-linéaire ${}^tc : {}^tB \otimes_A {}^tB \to {}^tB$, qui fournit un produit sur B. Les axiomes d'associativité et de commutativité faits sur c se transposent directement pour prouver que le produit en question est associatif et commutatif. Pour avoir une structure d'anneau commutatif unitaire sur B, il ne reste donc plus qu'à exhiber un élément neutre pour ce produit. Bien entendu, celui-ci va être fourni par l'augmentation de B. En effet, cette dernière induit une application A-linéaire de ${}^tA$ qui est canoniquement isomorphe à A dans ${}^tB$, et ce que tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
{}^tB \arrow[dr, "\sim", "x\mapsto x\otimes 1"'] & {}^tB \otimes_A {}^tB \arrow[l, "{}^tc"'] \\
& {}^tB \otimes_A {}^tA \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes {}^te"']
\end{tikzcd}$$

et l'on voit bien sur ce diagramme, que $1_B = {}^te(1)$ est élément neutre à droite pour le produit en question. De même on prouve que 1_B est élément neutre à gauche.

Pour avoir une structure de A-algèbre, il suffit de vérifier que ${}^te$ est un morphisme d'anneaux, c'est-à-dire que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
{}^tA \otimes_A {}^tA \arrow[r] \arrow[d, "{}^te\otimes {}^te"'] & {}^tA \arrow[d, "{}^te"] \\
{}^tB \otimes_A {}^tB \arrow[r, "{}^tc"] & {}^tB
\end{tikzcd}$$

commute. Pour cela, on dessine :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & A \otimes_A A & \\
B \arrow[u, "e"'] \arrow[r, "c"] & B \otimes_A B \arrow[u, "e\otimes e"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes e"] & B \otimes_A A \arrow[ul, "e\otimes \mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

On commence par remarquer que la composée de deux flèches de la ligne du bas n'est autre que $x \mapsto x \otimes 1$ d'après l'axiome de l'augmentation. On voit alors que le grand pentagone commute. On vérifie d'autre part que le petit triangle de droite commute, ce qui prouve que le carré principal commute, ce qui est ce que l'on cherche à transposition près.

Définissons maintenant la structure de A, R-bigèbre sur B. La comultiplication sera le morphisme transposé de la multiplication de B, $d : B \otimes_A B \to B$. L'associativité et la commutativité découlent des propriétés analogues de d. Peut-être un peu plus délicat est la vérification du fait que ${}^td$ est bien un morphisme de A-algèbres. Commençons par voir qu'il s'agit d'un morphisme d'anneaux. Cela revient à montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
{}^tB \arrow[r, "{}^td"] & {}^tB \otimes_A {}^tB \\
{}^tB \otimes_A {}^tB \arrow[u, "{}^tc"'] \arrow[r, "{}^td\otimes {}^td"'] & ({}^tB \otimes_A {}^tB) \otimes_A ({}^tB \otimes_A {}^tB) \arrow[u, "{}^tc\otimes {}^tc"']
\end{tikzcd}$$

et donc en transposant que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} B & B \otimes_A B \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "c\otimes c"] \\ B \otimes_A B \arrow[from=u, "c"'] & (B \otimes_A B) \otimes_A (B \otimes_A B) \arrow[l, "d\otimes d"'] \end{tikzcd}$$

Mais dire que ce diagramme commute veut dire simplement que c est un morphisme d'anneaux, ce qui est vrai. On montre exactement de la même façon qu'en fait ${}^t d$ est un morphisme de A-algèbres.

On vérifie que l'augmentation de ${}^t B$ est en fait la transposée du morphisme $A \to B$ faisant de B une A-algèbre et que l'antipodie de ${}^t B$ est la transposée de l'antipodie de B. L'action de R, quant à elle, est donnée par les morphismes ${}^t[\lambda]$.

Bien entendu, une flèche $f : B_1 \to B_2$ entre deux A, R-bigèbres libres de rang fini va induire une application A-linéaire ${}^t f : {}^t B_2 \to {}^t B_1$. On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'il s'agit en fait d'un morphisme de A, R-bigèbres. On a ainsi un foncteur contravariant allant de la catégorie des A, R-bigèbres libres de rang fini dans elle-même. Nous allons par abus de langage appeler encore ^{t} ce foncteur. Il n'est pas anodin de remarquer que ${}^t \circ {}^t$ est encore isomorphe au foncteur identique, et donc que ^{t} réalise bien une dualité de la catégorie des A, R-bigèbres libres de rang fini.

Notons finalement que cette dualité se comporte bien vis-à-vis des changements de base. Prenons S' un schéma affine sur S. Ceci équivaut à se donner une A-algèbre A'. Soit maintenant B désigne une A, R-bigèbre libre de rang fini. On a alors vu que l'on pouvait considérer $B' = B \otimes_A A'$ qui est une A', R-bigèbre. B' est libre de rang fini en tant que A'-module et on a une identification canonique entre ${}^t B \otimes_A A'$ et ${}^t B'$ (où le second ^{t} désigne la dualité dans la catégorie des A', R-bigèbres libres de rang fini). Ami lecteur, sauras-tu trouver cette identification ?

5.2.2 Avec des foncteurs

Considérons maintenant S un schéma affine, disons $S = \mathrm{Spec} A$. La dualité que l'on vient de décrire dans le paragraphe précédent se transpose directement à la catégorie des S-schémas en R-module qui sont tels que leur bigèbre est libre de rang fini sur A. On veut voir ici s'il n'existe pas un moyen de décrire cette dualité directement sur les foncteurs associés à ces schémas. On va être contraint de supposer ici que $R = \mathbb{Z}$.

Prenons pour cela $\mathcal{G}$ un S-schéma en groupe commutatif. Notons B sa A-bigèbre et supposons que B est libre de rang fini sur A. Caractérisons dans un premier temps le groupe abélien $\mathcal{G}(A)$. On voit tout de suite que :

$$\mathcal{G}(A) = \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(B, A) \subset \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{mod}}(B, A) = {}^t B$$

Prenons donc un élément $\varphi \in {}^t B$ et regardons à quelle condition, il appartient à $\mathcal{G}(A)$, c'est-à-dire à quelle condition c'est un morphisme de A-algèbre. Mais dire cela revient à dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} A \otimes_A A \arrow[r] & A \\ B \otimes_A B \arrow[u, "\varphi\otimes\varphi"'] \arrow[r, "d"] & B \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

En transposant, cela équivaut encore à la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \otimes_A A \arrow[d, "{}^t\varphi\otimes{}^t\varphi"'] & A \arrow[l] \arrow[d, "{}^t\varphi"'] \\ {}^t B \otimes_A {}^t B & {}^t B \arrow[l, "{}^t d"'] \end{tikzcd}$$

Comme on a affaire à des applications A-linéaires, ce diagramme va commuter si et seulement si l'unité de A est envoyé sur le même élément par les deux chemins possibles. On obtient ainsi la condition ${}^t d(\varphi) = \varphi \otimes \varphi$.

L'ensemble $\mathcal{G}(A)$ est muni d'une structure de groupe. Voyons comment celle-ci se transporte sur le sous-ensemble de ${}^tB$ composé des φ tels que ${}^td(\varphi) = \varphi \otimes \varphi$, via la bijection que l'on vient d'expliciter. Rappelons tout d'abord que la loi de groupe sur $\mathcal{G}(A)$ est défini par, si c désigne la comultiplication de B :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(A) \times \mathcal{G}(A) \arrow[rr] \arrow[d, "\sim"'] & & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\sim"] \\ \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(B \otimes_A B, A) \arrow[rr, "\cdot \circ c"] & & \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(B, A) \end{tikzcd}$$

Prenons alors deux morphsimes de A-algèbres $\varphi_1, \varphi_2 : B \to A$. Le produit est alors tout simplement $d \circ (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ c$ et donc correspond précisément à ${}^tc(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$, c'est-à-dire au véritable produit de φ_1 par φ_2 dans la bigèbre duale ${}^tB$.

Prenons maintenant C une A-algèbre. On a vu que le schéma en groupe commutatif $\mathcal{G}_C$ était représenté par la bigèbre $B_C = B \otimes_A C$. On a vu également que la C-bigèbre de ${}^t\mathcal{G}_c$ s'obtenait en considérant le produit tensoriel ${}^tB_C = {}^tB \otimes_A C$. D'autre part, on a par définition $\mathcal{G}(C) = \mathcal{G}_C(C)$. On en déduit donc que $\mathcal{G}(C)$ est le groupe formé des éléments φ de ${}^tB$ vérifiant $\varphi \in {}^tB_C$ tel ${}^td_C(\varphi) = \varphi \otimes \varphi$, ${}^td_C$ désignant la comultiplication de la C-bigèbre ${}^tB_C$. Ainsi on a une description explicite du foncteur $\mathcal{G}$ en foncteur de la bigèbre ${}^tB$. Bien sûr, en dualisant on obtient une description explicite du foncteur ${}^t\mathcal{G}$ en fonction de la bigèbre B : si C est une A-algèbre, on a :

$${}^t\mathcal{G}(C) = \{x \in B_C \mid c_C(x) = x \otimes x\}$$

où c_C désigne la comultiplication de la C-bigèbre B_C, la structure de groupe abélien de cet ensemble étant celle induite par la multiplication de B.

Tout cela est très bien, mais on n'est pas encore assez content. On aimerait une description de ${}^tG$ qui ne fasse pas intervenir les bigèbres. Mais il est facile de voir que se donner un élément (inversible) x de B_C tel que $c(x) = x \otimes x$ revient à se donner un morphisme de A, R-bigèbres de $C[X, frac1X]$ (munie de la comultiplication induite par $X \mapsto X \otimes X$) dans B. Ainsi on a l'identification ${}^t\mathcal{G}(C) = \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_C, (\mathbb{G}_m)_C)$, le Hom étant celui de la catégorie des (Spec C)-schémas en groupe commutatif. On a vu que cette catégorie était additive et donc l'ensemble de droite est muni d'une structure de groupe abélien. On vérifie immédiatement que l'identification précédente respecte la loi de groupe.

On voit que cette description s'étend sans problème à la catégorie des S-schémas en groupe commutatif non nécessairement finis ou plats, avec S par forcément affine. On pose alors ${}^t\mathcal{G}(T) = \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_T, (\mathbb{G}_m)_T)$ pour tout S-schéma T, le Hom étant celui de la catégorie des T-schémas en groupe commutatif. Le problème est que le foncteur que l'on obtient ainsi n'est plus du tout involutif et en fait ne réalise par une dualité. Toutefois, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant si l'on se restreint à S localement nœthérien et à la catégorie des S-schémas en groupe commutatif finis et plats, les choses se passent bien.

5.2.3 Sur une base quelconque

Prenons donc S un schéma localement nœthérienet $\mathcal{G}$ un S-schéma en groupe commutatif fini et plat. On sait alors que l'on peut recouvrir S par des ouverts affines $U_i = \mathrm{Spec}\ A_i$ de telle sorte que le schéma $U_i \times_S G$ soit également affine et tel que si $U_i \times_S G = \mathrm{Spec}\ B_i$, alors B_i est une A_i-algèbre libre de rang fini en tant que A_i-module. On a vu également que l'on pouvait mettre sur B_i une structure de A_i-bigèbre qui reflète la structure du schéma en groupe commutatif $\mathcal{G}$.

Le schéma en groupe commutatif ${}^t\mathcal{G}$ défini précédemment est alors tel que $U_i \times_S {}^tG$ soit affine, disons $U_i \times_S {}^tG = B_i'$, tel que B_i' soit une A_i algèbre libre de type fini. En outre, on a un isomorphisme canonique entre les A_i-bigèbres ${}^tB_i$ et B_i'. Ceci permet de prouver directement que le foncteur ^{t} restreint aux S-schémas en groupe commutatif finis et plats est encore une involution et réalise une dualité.

Réintroduisons maintenant notre anneau R que l'on avait laissé tomber depuis tout à l'heure. Gardons les notations précédentes mais supposons en outre que $\mathcal{G}$ est muni d'une structure de S-schéma en R-module. Les B_i sont alors des A_i, R-bigèbres et donc induisent une structure de A_i, R-bigèbres sur ${}^tB_i$. L'isomorphisme dont il était question précédemment permet de transporter cette structure sur B_i' et donc d'en faire une A_i, R-bigèbre, ce qui permet de faire de ${}^tG$ un S-schéma en R-module. Bien entendu, cette construction est fonctorielle comme on peut le vérifier facilement et le foncteur ^{t} ainsi défini est encore involutif et donc une dualité.

5.2.4 Groupes diagonalisables et groupes constants

Nous allons vu que si Γ est un groupe fini, les S-schéma en groupe commutatif $C(\Gamma)$ et $D(\Gamma)$ sont finis et plats. Nous allons voir dans ce paragraphe que la dualité de Cartier les échange. Bien entendu pour faire cela, on peut supposer que la base S est affine, disons $S = \text{Spec } A$. Bien entendu également, il suffit de prouver par exemple que ${}^tD(\Gamma)$ est isomorphe à $C(\Gamma)$.

On rappelle que la A-bigèbre de $D(\Gamma)$ est en tant que A-algèbre $A[\Gamma]$ dont une base est formée des e_γ pour $\gamma \in \Gamma$ et vérifie $e_\gamma e_{\gamma'} = e_{\gamma\gamma'}$. La structure de bigèbre est donnée par la comultiplication définie par $c(e_\gamma) = e_\gamma \otimes e_\gamma$. Se donner une application linéaire de $A[\Gamma]$ dans A revient exactement à se donner l'image des e_γ puisqu'ils forment une base. Ainsi le dual de $A[\Gamma]$ en tant que A-module est canoniquement isomorphe à l'ensemble des fonctions de Γ dans A, que l'on noter A^Γ et dans cet isomorphisme à e_γ il correspond la fonction caractéristique de γ, que l'on va noter χ_γ.

Regardons maintenant comment est définie la multiplication dans A^Γ. Prenons pour cela γ et γ' dans Γ et essayons d'évaluer le produit $\chi_\gamma\chi_{\gamma'}$. Si $\gamma \neq \gamma'$, alors l'élément $\chi_\gamma \otimes \chi_{\gamma'}$ correspond à l'application nulle de $A[\Gamma] \otimes_A A[\Gamma]$ dans A. Ainsi le produit de χ_γ par χ'_γ est nul. Supposons maintenant que $\gamma = \gamma'$. Dans ce cas, l'application A-linéaire de $A[\Gamma] \otimes_A A[\Gamma]$ dans A qui correspond à $e_\gamma \otimes e_\gamma$ est celle qui à $e_{\gamma_1}e_{\gamma_2}$ associe 1 si $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ et 0 sinon. Ainsi en composant à droite par c, on trouve que le produit de χ_γ par lui-même est décrit par l'application A-linéaire de $A[\Gamma]$ dans A qui associe 1 à e_γ et 0 à e'_γ si $\gamma' \neq \gamma$. Autrement dit on a $\chi_\gamma\chi_\gamma = \chi_\gamma$.
Tout cela prouve que le produit sur $A[\Gamma]$ correspond bien au produit classique des applications.

La comultiplication quant à elle est donnée par la transposée de la multiplication de $A[\Gamma]$. Prenons $\gamma \in \Gamma$. χ_γ correspond à l'application A-linéaire de $A[\Gamma]$ dans A qui envoie e_γ sur 1 et $e_{\gamma'}$ sur 0 si $\gamma' \neq \gamma$. En composant par d, on obtient l'application A-linéaire de $A[\Gamma] \otimes_A A[\Gamma]$ dans A qui à $e_{\gamma_1} \otimes e_{\gamma_2}$ associe 1 si $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ et 0 sinon. On a ainsi :

$$ {}^td(\chi_\gamma) = \sum_{\gamma_1+\gamma_2=\gamma} \chi_{\gamma_1} \otimes \chi_{\gamma_2} $$

On reconnaît alors triomphalement le S-schéma en groupe commutatif $C(\Gamma)$. Cette correspondance permet par exemple de prouver sans se fatiguer plus que le foncteur C conserve les noyaux dès que le schéma de base S est localement nœthérien. En effet, on a vu que le foncteur D envoyait conoyaux sur noyaux.

Remarquons finalement que si R est un corps fini et Γ est R-espace vectoriel, on a vu que $C(\Gamma)$ peut être muni d'une structure de S-schéma en R-espace vectoriel et donc grâce à la dualité de Cartier, on récupère une structure de S-schéma en R-espace vectoriel sur $D(\Gamma)$. En fait, il est facile de vérifier que celle-ci est donnée explicitement par la formule $[\lambda](e_\gamma) = e_{\lambda^{-1}\gamma}$, et ce pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $\lambda \in R$. Par suite, on obtient une structure de R-espace vectoriel sur l'ensemble $\text{Hom}(\Gamma, B^\star)$ où B est une A-algèbre quelconque. L'action d'un $\lambda \in R$ est donnée par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\text{Hom}_{A-\text{alg}}(A[\Gamma], B) \arrow[r, "{[\lambda]\circ\cdot}"] \arrow[d, "\sim"'] & \text{Hom}_{A-\text{alg}}(A[\Gamma], B) \arrow[d, "\sim"] \\
\text{Hom}(\Gamma, B^\star) \arrow[r] & \text{Hom}(\Gamma, B^\star)
\end{tikzcd}$$

On voit alors que si $\varphi \in \text{Hom}(\Gamma, B^\star)$, le morphisme $\lambda\varphi$ est défini par $(\lambda\varphi)(\gamma) = \varphi(\lambda^{-1}\gamma)$.

5.3 Conséquences

5.3.1 Existence de conoyaux

On a déjà vu que la catégorie des S-schémas en R-module admettait des noyaux. Plus précisément, on a vu que si $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont deux S-schémas en R-module et que $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ est un morphisme, le noyau de f est donné par le pull-back du neutre $e_2 : F \to G_2$ de $\mathcal{G}_2$ par f. En regardant localement, on vérifie que si $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont finis et plats, alors le noyau de f l'est aussi. Ainsi la catégorie des S-schémas en R-module finis et plats admet elle aussi des noyaux. La dualité de Cartier permet alors de prouver directement que cette même catégorie admet aussi des conoyaux, un conoyau n'étant rien d'autre qu'un noyau dans la catégorie opposée.

Il est important de remarquer que bien que la catégorie des S-schémas en R-module finis et plats admette des noyaux et des conoyaux, elle n'est en général pas abélienne. On a quand même le théorème suivant :

Théorème 5.3.1 (Grothendieck (?)). Si K est un corps, la catégorie des schémas en R-module finis et plats sur Spec K est une catégorie abélienne.

Démonstration. $\surd$

Mais cela n'est pas toujours le cas. Par exemple si K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{O}_K$ désigne son anneau des entiers, un résultat dû à Raynaud (?) dit que la catégorie des (Spec O_K)-schémas en R-module finis et plats est abélienne si et seulement si l'indice de ramification absolu de K (c'est-à-dire la valuation de p) est inférieur ou égal à $p-1$.

Prenons maintenant $\mathcal{G}$ un S-schéma en groupe commutatif fini et plat et $\mathcal{H}$ un sous-schéma fermé en groupe commutatif fini et plat de $\mathcal{G}$. Le conoyau de la flèche d'inclusion de H dans G est ce que l'on appelle le *quotient* de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{H}$ et que l'on note $\mathcal{G}/\mathcal{H}$. On a alors une propriété de multiplicativité des rangs :

$$\mathrm{rg}\,(\mathcal{G}) = \mathrm{rg}\,(\mathcal{H}) \cdot \mathrm{rg}\,(\mathcal{G}/\mathcal{H})$$

5.3.2 Théorème de Deligne

Prenons $\mathcal{G}$ un S-schéma en groupe commutatif fini et plat, où S désigne toujours un schéma quelconque localement nœthérien. Le théorème de Deligne dit alors que $\mathcal{G}$ est *tué* par son rang. Cela signifie que si on appelle par exemple n le rang de G, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mathrm{id}\times\ldots\times\mathrm{id}"] \arrow[rrd, "e"'] & G^n \arrow[r, "p"] & G \\ & & S \arrow[u] \end{tikzcd}$$

(où G^n désigne le produit au-dessus de S de G par lui-même n fois, e désigne le neutre de $\mathcal{G}$ et p le produit itéré), ou encore de façon équivalente que pour toute A-algèbre B et tout $\lambda \in \mathcal{G}\,(B)$, on a $\lambda^n = 0$. Nous allons dans ce paragraphe démontrer ce théorème sous la deuxième forme annoncée.

Montrons tout d'abord que cela est pour tout $\lambda \in \mathcal{G}\,(A)$. Bien entendu, on peut supposer, quitte à raisonner localement, que S et G sont affines et même que si B désigne la bigèbre de G et si $S = \mathrm{Spec}\ A$, alors B est une A-algèbre finie. Nous avons vu que dans ces conditions l'on pouvait considérer $\mathcal{G}\,(A)$ comme un sous-groupe multiplicatif de ${}^tB$. Prenons donc $\lambda \in G\,(A)$ et considérons λ comme un élément de ${}^tB$. La multiplication par λ est alors un endomorphisme A-linéaire de ${}^tB$. Considérons sa transposée $\tau : B \to B$ puis τ' l'endormorphisme ${}^tB$-linéaire de ${}^tB \otimes_A B$ déduit de τ par extension des scalaires à ${}^tB$. Autrement dit $\tau' = \mathrm{id}_{{}^tB} \otimes \tau$.

D'autre part, l'application identité $B \to B$ peut être vu comme un élément de $\mathcal{G}\,(B)$ et donc comme un élément de ${}^tB \otimes_A B$. Il est facile de voir que la multiplication par cet élément définit un endomorphisme de ${}^tB \otimes_A B$. Appelons-le ρ et regardons le commutateur de τ et de ρ, c'est-à-dire l'élément $\tau\rho\tau^{-1}\rho^{-1}$. C'est un exercice de vérifier qu'il correspond à la multiplication par $\lambda \otimes 1$ dans l'anneau ${}^tB \otimes_A B$. Ainsi, en regardant les déterminants, on obtient directement $\lambda^n = 1$, ce qui démontre bien notre première assertion.

Pour en déduire le théorème, il suffit de faire une extension des scalaires. Plus précisément, considérons C une A-algèbre finie. On veut montrer que tout $\lambda \in \mathcal{G}\,(C)$ vérifie $\lambda^n = 1$. On considère alors $\mathcal{G}_C$ le (Spec C)-schéma en groupe commutatif fini et plat, déduit de $\mathcal{G}$ par extension des scalaires de A à C. Il vérifie $\mathcal{G}_C\,(C) = \mathcal{G}\,(C)$ et ce en tant que groupe et l'on applique le résultat particulier démontrer précédemment qui dit que $\mathcal{G}\,(C)$ est un groupe de n-torsion. Ceci permet de conclure.

5.3.3 Sous-groupe engendré

Juste pour simplifier les notations, on supposera encore dans ce paragraphe que $S = \mathrm{Spec}\ A$ est affine et que A est un anneau nœthérien mais tout ce que l'on va dire s'étend sans problèmes au cas où S est un schéma localement nœthérien. Prenons $\mathcal{G}$ un S-schéma en R-module fini et plat. Notons B sa bigèbre. Également dans un souci de simplifier, on va supposer que B est libre en tant que A-module. Donnons-nous finalement un sous-schéma X de G, le but étant de définir ce qu'est le sous-schéma en R-module fini et plat engendré par X.