

Des sommes, des sommes et encore des sommes...

Xavier Caruso

Définition 1. Un *ordre de sommation* est la donnée d'un triplet (α, m, M) où α est un ordinal et m et M sont des fonctions $\alpha \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\forall \beta \in \alpha, M(\beta) > m(\beta)$
2. $\forall \gamma > \beta, m(\gamma) \neq M(\beta)$ et $M(\gamma) \neq M(\beta)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \beta \in \alpha, M(\beta) = n$

Remarque 2. On voit tout de suite qu'un tel α est forcément dénombrable.

On considère un ordre de sommation (α, m, M) , un espace de Banach E et une suite $u = (u_n)$ d'éléments de E . On définit par induction sur les ordinaux $\beta \leq \alpha$ des suites d'éléments de E , u^β :

1. $u^0 = u$
2. si β est limite, $(u^\beta)_n = \lim_{\gamma < \beta} (u^\gamma)_n$ si celle-ci est définie et \perp sinon
3. i) $(u^{\beta+1})_n = (u^\beta)_n$ si $n \neq m(\beta)$ et $n \neq M(\beta)$
ii) $(u^{\beta+1})_{M(\beta)} = 0$
iii) $(u^{\beta+1})_{m(\beta)} = (u^\beta)_{m(\beta)} + (u^\beta)_{M(\beta)}$ en convenant que \perp est un élément absorbant pour l'addition.

On voit tout de suite que la troisième condition de la définition d'un ordre de sommation prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u^\alpha = 0$. Ceci conduit à poser la définition suivante :

Définition 3. La *somme* de la suite (u_n) selon l'ordre de sommation (α, m, M) est $(u^\alpha)_0$. On dit que la somme *diverge* si cette quantité vaut \perp et qu'elle *converge* dans le cas contraire.

Exemple 4.

1. L'ordre de sommation (ω, m, M) où $m(n) = 0$ et $M(n) = n + 1$ (où $n \in \omega$) définit la sommation usuelle.
2. L'ordre de sommation $(\omega + \omega + 1, m, M)$ où $m(n) = 0$, $M(n) = 2n + 2$, $m(\omega + n) = 1$, $M(\omega + n) = 2n + 3$, $m(\omega + \omega + 1) = 0$, $M(\omega + \omega + 1) = 1$ (où $n \in \omega$) correspond à sommer séparément les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs et de faire la somme des deux résultats obtenus.

Théorème 5. Si la suite (u_n) est sommable, alors (u_n) converge pour n'importe quel ordre de sommation et la somme de (u_n) ne dépend pas de l'ordre de sommation choisi.

Traisons tout d'abord le cas où (u_n) est à valeurs dans \mathbb{R}^+ . La deuxième condition de la définition d'un ordre de sommation prouve que les suites $((u^\beta)_n)_{\beta \in \alpha}$ sont tout d'abord croissante puis constante égale à 0. Ainsi on n'a pas de problème de convergence (plus précisément \perp ne peut correspondre qu'à une limite infinie).

Notons S la somme (au sens classique) de la suite u et S_β la somme de la suite u^β . Nous allons montrer par induction que pour tout $\beta \leq \alpha$, $S_\beta = S$. Ceci est vrai par hypothèse au cran $\beta = 0$. On vérifie facilement l'hérédité dans le cas d'un ordinal successeur.

Supposons donc que β est limite. Prenons I une partie finie de \mathbb{N} . On a par hypothèse de récurrence :

$$\forall \gamma < \beta, \quad \sum_{i \in I} (u^\gamma)_i \leq S$$

Ainsi en passant à la limite, on obtient :

$$\sum_{i \in I} (u^\beta)_i \leq S$$

Pour l'inégalité dans l'autre sens, on va avoir besoin de définir un ordre sur l'ensemble des parties finies de \mathbb{N} :

Définition 6. On dira que $I \leq I'$ si $\text{Card } I < \text{Card } I'$ ou si $\text{Card } I = \text{Card } I'$ et après tri des éléments de I (et de I') par ordre croissant le uplet obtenu pour I est plus petit que celui obtenu pour I' dans l'ordre lexicographique. Remarquons tout de suite que l'on obtient ainsi un bon ordre.

Prenons désormais un réel $S' < S$. Il va alors exister un sous-ensemble fini de \mathbb{N} , I , tel que $\sum_{i \in I} (u^0)_i > S'$. Nous allons construire pour tout ordinal $\beta \leq \alpha$ un ensemble d'indice I_β tel que si $\beta < \gamma$, on ait :

1. $I_0 = I$
2. $I_\gamma \leq I_\beta$
3. $\sum_{i \in I_\beta} (u^\beta)_i \leq \sum_{i \in I_\gamma} (u^\gamma)_i$

On initialise donc en posant $I_0 = I$.

Dans le cas successeur, on pose $I_{\beta+1} = I_\beta - \{M(\beta)\} \cup \{m(\beta)\}$. On vérifie tout de suite que les conditions énoncés ci-dessus sont bien vérifiées.

Dans le cas limite, comme la suite des $(I_\gamma)_{\gamma < \beta}$ est décroissante et que l'ordre est bon, elle stationne. On définit donc I_β comme étant la limite de cette suite. Là aussi, on vérifie immédiatement que les conditions voulues sont bien vérifiées.

On conclut finalement en remarquant que :

$$\sum_{i \in I_\alpha} (u^\alpha)_i > S'$$

ce qui prouve que $S_\alpha > S'$ et puis que $S_\alpha \geq S$.

Regardons maintenant ce qui se passe si la suite (u_n) est à valeurs dans \mathbb{R} . On définit alors les suites (v_n) et (w_n) par $v_n = \max\{u_n, 0\}$ et $w_n = \max\{-u_n, 0\}$. Ces suites sont alors positives et pour tout n , on a la relation $u_n = v_n - w_n$.

On montre alors facilement par induction sur les ordinaux que pour tout β pour lequel cela a un sens, on a $u^\beta = v^\beta - w^\beta$. (On montre en même temps que l'on a aucun problème pour les convergences).

Ceci prouve directement en utilisant le cas précédent que la somme de la suite (u_n) ne dépend pas de l'ordre de sommation choisi.

Traisons finalement le cas général. Considérons donc une suite (u_n) à valeurs dans E et (α, m, M) un ordre de sommation.

Nous allons tout d'abord prouver par induction que la somme converge. Pour les ordinaux successeurs, il n'y a rien à faire. Soit donc β un ordinal limite. Considérons $\beta_0 < \beta$. Considérons également un entier n tel que la suite $((u^\gamma)_n)_{\gamma < \beta}$ ne soit pas constante égale à 0 à partir d'un certain rang.

On montre alors facilement par induction que pour tout ordinal β_1 tel que $\beta_0 \leq \beta_1 < \beta$ (on n'a pas de problème de convergence en utilisant la première hypothèse d'induction) :

$$\|(u^{\beta_1})_n - (u^{\beta_0})_n\| \leq (\|u\|^{\beta_1})_n - (\|u\|^{\beta_0})_n$$

On considère maintenant une suite croissante d'ordinaux $\beta_k < \beta$ dont la réunion est β (ceci est possible car β est un ordinal limite dénombrable et donc de cofinalité ω). La condition précédente prouve que pour tous entiers k et l tels que $k \geq l$, on a l'inégalité :

$$\|(u^{\beta_k})_n - (u^{\beta_l})_n\| \leq (\|u\|^{\beta_k})_n - (\|u\|^{\beta_l})_n$$

Or la famille est sommable donc d'après le premier cas, la suite de droite converge. Elle est donc de Cauchy. L'inégalité ci-dessus prouve alors que la suite $((u^{\beta_k})_n)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy puis converge.

On prouve alors facilement que $((u^\gamma)_n)_{\gamma < \beta}$ converge (intuitivement, on a une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence). Ceci conclut l'induction.

Notons donc S la somme de la suite (u_n) .

Considérons désormais λ une forme linéaire continue sur E et définissons $\lambda(u)$ comme étant la suite de terme général $\lambda(u)_n = \lambda(u_n)$. On voit par une induction immédiate que $\lambda(S)$ vaut la somme de la suite $\lambda(u)$. Donc en particulier, d'après le cas précédent, $\lambda(S)$ ne dépend pas de l'ordre de sommation (α, m, M) .

Mais le théorème d'Hahn-Banach prouve que la connaissance des tous les $\lambda(S)$ permet de retrouver S . Ainsi S non plus ne dépend pas de l'ordre de sommation. Youpi !

Corollaire 7. Si l'on ne suppose plus que E est un espace de Banach, on ne peut pas conclure que la suite (u_n) converge. Par contre, on garde l'indépendance de la somme en fonction de l'ordre de sommation.

Il suffit pour prouver cela de se placer dans le complété de l'espace vectoriel en question.