Un système physique présenté à la Villette

Xavier Caruso

Table des matières

1 Présentation du système physique

Le système physique se présente sous la forme d'un moulin à n pales. Au bout de chaque pale est placé un récipient contenant de l'eau. Le poids de l'eau fait alors tourner le moulin. D'autre part, un système extérieur (en l'occurrence une chute d'eau au sommet) permet de remplir ou de vider certains récipients. On supposera que la vitesse de remplissage ne dépend que de la position du récipient. Le but de ce papier est de décrire l'évolution du système.

On supposera en outre que le mouvement du moulin a lieu dans un plan vertical. Toutefois, s'il n'en est pas ainsi, il suffit de projeter le système dans un plan vertical pour se ramener à ce cas. Ceci a juste pour conséquence de réduire la longueur des pales du moulin.

2 Mise en équation et simplifications

2.1 Etude générale

On numérote les récipients par les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On note V_k le volume d'eau contenu dans le k-ième verre et θ l'angle que fait l'horizontale avec la pale portant le 0-ième verre. Pour modéliser la chute d'eau, on introduit une fonction f 2π-périodique vérifiant :

$$\frac{dV_k}{dt} = f\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

D'autre part on note J le moment d'inertie de l'ensemble que l'on peut supposer constant (en considérant que le poids du moulin est grand devant celui de l'eau). On introduit également l la longueur d'une pale, g l'accélération de la pesanteur et ρ la masse volumique de l'eau. Le théorème du moment cinétique donne alors l'égalité suivante :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} -l\rho g V_k \, \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

ce qui peut également s'écrire, en posant $\alpha = \frac{\rho l g}{J}$,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\alpha \sum_{k\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathcal{R}e\left(V_k e^{i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$$

On pose alors $u = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} V_k e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ afin d'obtenir :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\alpha \mathcal{R}e\left(u.e^{i\theta}\right) \tag{1}$$

On calcule alors :

$$\frac{du}{dt} = e^{-i\theta} \sum_{k\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) e^{i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

On suppose alors que n est grand afin de pouvoir remplacer la somme de Riemann par son intégrale (voir plus loin). L'équation devient alors :

$$\frac{du}{dt} \simeq \frac{ne^{-i\theta}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{ix} dx = n\,(a+ib)\, e^{-i\theta} \tag{2}$$

où $a = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx$ et $b = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin x dx$.

On pose désormais $v = ue^{i\theta}$ et $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Les équations 1 et 2 fournissent le nouveau système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{du}{dt}.e^{i\theta} + iv\omega = n\left(a + ib\right) + iv\omega \\ \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\alpha \mathcal{R}e\left(v\right) \end{cases}$$

On écrit ensuite v sous la forme $v = x + iy$ où x et y sont des réels. Cela donne :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = na - y\omega \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = nb + x\omega \\ \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\alpha x \end{cases}$$

En multipliant la deuxième équation par α, on obtient :

$$\alpha \frac{dy}{dt} = \alpha nb + \alpha x\omega = \alpha nb - \omega \frac{d\omega}{dt}$$

que l'on peut intégrer. On trouve :

$$\alpha y = \alpha nbt - \frac{\omega^2}{2} + k$$

où la constante k est donnée par les conditions initiales.

On multiplie alors la première équation par $(-\alpha)$:

$$-\alpha \frac{dx}{dt} = -\alpha na + \left(\alpha y\right)\omega$$

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = -\alpha na + \left(\alpha nbt - \frac{\omega^2}{2} + k\right)\omega = \left(k + \alpha nbt\right)\omega - \frac{\omega^3}{2} - \alpha na$$

2.2 Cas où $b = 0$

Notons tout d'abord que ce cas se produit lorsque la fonction f est paire, c'est-à-dire lorsque la répartition de l'eau présente une symétrie par rapport à l'axe horizontal.

L'équation différentielle devient alors :

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = k\omega - \frac{\omega^3}{2} - \alpha na$$

On multiplie alors l'équation par $\frac{d\omega}{dt}$, ce qui permet d'intégrer :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = k\frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega^4}{8} - \alpha na\omega + C$$

2.3 Cas où $b \neq 0$

Dans ce cas, on a $\alpha nb \neq 0$ et on peut donc effectuer le changement de variable $x = k + \alpha nbt$. Autrement dit, on introduit la fonction h définie par $h\left(k + \alpha nbx\right) = \omega\left(x\right)$. En dérivant deux fois, on obtient :

$$\frac{d^2\omega}{dx^2}\left(x\right) = \left(\alpha nb\right)^2 \frac{d^2h}{dx^2}\left(k + \alpha nbx\right)$$

Ainsi la fonction h vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\left(\alpha nb\right)^2 \frac{d^2h}{dx^2}\left(k + \alpha nbx\right) = \left(k + \alpha nbx\right) h\left(k + \alpha nbx\right) - \frac{h^3}{2}\left(k + \alpha nbx\right) - \alpha na$$

soit encore :

$$\frac{d^2h}{dx^2} = \frac{1}{\left(\alpha nb\right)^2} xh - \frac{h^3}{2\left(\alpha nb\right)^2} - \frac{a}{\alpha nb^2}$$

On effectue ensuite le changement de fonction $y = \frac{h}{\alpha nb\sqrt{2}}$. On calcule alors :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\alpha nb\sqrt{2}}\frac{d^2h}{dx^2} = \frac{1}{\left(\alpha nb\right)^3\sqrt{2}} xh - \frac{h^3}{\left(\alpha nb\sqrt{2}\right)^3} - \frac{a}{\alpha^2 n^2 b^3\sqrt{2}} = \frac{1}{\left(\alpha nb\right)^2} xy - y^3 - \frac{a}{\alpha^2 n^2 b^3\sqrt{2}}$$

On pose finalement $\beta = \frac{1}{\left(\alpha nb\right)^2}$ et $\eta = \frac{a}{\alpha^2 n^2 b^3\sqrt{2}}$ pour obtenir l'équation différentielle :

$$y'' = \beta xy - y^3 - \eta$$

3 « Résolution » de l'équation différentielle

4 Discussion des approximations

4.1 Intégrale de Riemann

4.1.1 Le problème général

Le problème général est le suivant : on considère f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On aimerait estimer l'erreur que l'on commet lorsque l'on remplace $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ par $\int_0^1 f(x)\,dx$.

On a tout d'abord :

$$e(n) = \left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx\right|$$

On utilise alors le premier théorème de la moyenne qui prouve l'existence de réels c_k (pour k compris entre 0 et $n-1$) compris entre 0 et $\frac{1}{n}$ vérifiant

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx = f\left(\frac{k}{n} + c_k\right)$$

On a donc l'estimation :

$$e(n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n} + c_k\right)\right|$$

4.1.2 Cas où f est dérivable

Pour pouvoir continuer, on aura besoin de supposer que f est dérivable. On peut alors utiliser le théorème des accroissements finis qui amène à l'inégalite suivante :

$$e(n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left|f'\left(\frac{k}{n} + d_k\right)\right|$$

où d_k est un réel compris entre 0 et c_k et donc a fortioti entre 0 et $\frac{1}{n}$.

Ainsi, on peut écrire :

$$e(n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|f'\left(\frac{k}{n} + d_k\right)\right| \longrightarrow \int_0^1 |f'(x)|\,dx < \infty$$

On en déduit que si n est suffisamment grand l'approximation faite dans le calcul n'est pas trop mauvaise et d'autant meilleure que la fonction f varie lentement.

4.1.3 Un cas particulier

On revient ici à une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique et on s'intéresse à la somme suivante :

$$g(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

Le cas particulier que nous allons étudier est le suivant. Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et f la fonction définie sur $[0, 2\pi]$ par :

$$\begin{array}{ll} f(x) = v_0 & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right[\\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

que l'on prolonge par periodicité à $\mathbb{R}$ tout entier.

On calcule alors :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{ix} dx = \frac{v_0}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}} e^{ix} dx = \frac{iv_0}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

On pose alors :

$$h(\theta) = \frac{niv_0}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) e^{-i\theta}$$

Il s'agit maintenant de comparer les fonctions g et h sur $\mathbb{R}$. Cependant elles vérifient toutes deux

$$\varphi\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) = e^{-\frac{2i\pi}{n}} \varphi(\theta)$$

Il suffit donc de les comparer sur un intervalle d'amplitude 2π, par exemple $I = \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right[$. Or sur I, on a $g(\theta) = iv_0$. Il s'agit donc de majorer :

$$\left| \frac{niv_0}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) e^{-i\theta} - iv_0 \right| = v_0 \left| \frac{n}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) e^{-i\theta} - i \right| \leq v_0 \left| \frac{n}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) e^{\frac{i\pi}{n}} - 1 \right| \sim v_0 \frac{\pi}{n}$$

On remarque que dans ce cas, l'approximation est excellente (bien que la fonction ne soit pas dérivable).